Межрегиональная научная универсиада по математике
(г. Елабуга, 25 января 2014 г.)

Задачи и решения

Задачи для 9 класса

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}\,, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}\,. \end{cases}$$

(**3** балла)

Решение. Обозначим $\dfrac{1}{2x-y} = u$, $\dfrac{1}{x-2y} = v$.

$$\begin{cases} 2u + 3v = \dfrac{1}{2}\,, \\ 2u - \ v \ = \ \dfrac{1}{18}\,, \end{cases} \iff \begin{cases} u = \dfrac{1}{12}\,, \\ v \ = \ \dfrac{1}{9}\,. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2x - y = 12\,, \\ x - 2y = 9\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ 5\,, \\ y = -2\,. \end{cases}$$

Ответ: $(5, -2)$.

2. Доказать, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$ $\qquad (1-x)^n + (1+x)^n < 2^n\,.$ $\qquad$ (**6** баллов)

Решение. Метод математической индукции.
а) При $n = 2$ очевидно.
б) Если верно для $n = k$, то

$$(1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} < ((1-x)^k + (1+x)^k) \cdot ((1-x) + (1+x)) < 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}\,.$$

3. Пусть x — натуральное число. Докажите, что хотя бы одно из чисел $x^3 + x$ или $x^3 - x$ делится на 10. (**4** балла)

Решение. Вычислим последние цифры всех чисел в данных выражениях. Решение оформим в виде таблицы, где перебраны все возможные случаи.

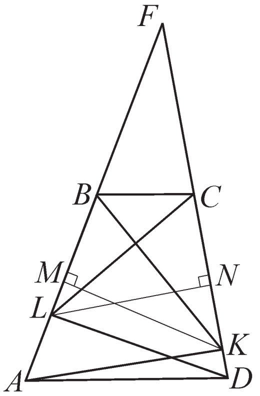
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
x^3+x	0	2	0	0	8	0	2	0	0	8
x^3-x	0	0	6	4	0	0	0	6	4	0

4. При каких значениях a квадратные трёхчлены $x^2 + ax + 1$ и $x^2 + x + a$ имеют общий корень? (**5** баллов)

Решение. Пусть c — общий корень этих многочленов. Тогда $c^2 + ac + 1 = c^2 + c + a = 0$. Отсюда $ac + 1 = c + a$, $a(c-1) = c - 1$, $(a-1)(c-1) = 0$. Тогда $a = 1$ или $c = 1$.
Если $a = 1$, то трёхчлены равны $x^2 + x + 1$ и они не имеют корней.
Если $c = 1$, то $1^2 + a + 1 = 0$, откуда $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

5. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка K такая, что треугольник ABK — равносторонний. Докажите, что на прямой AB есть точка L, для которой треугольник CDL — равносторонний. (**4** балла)

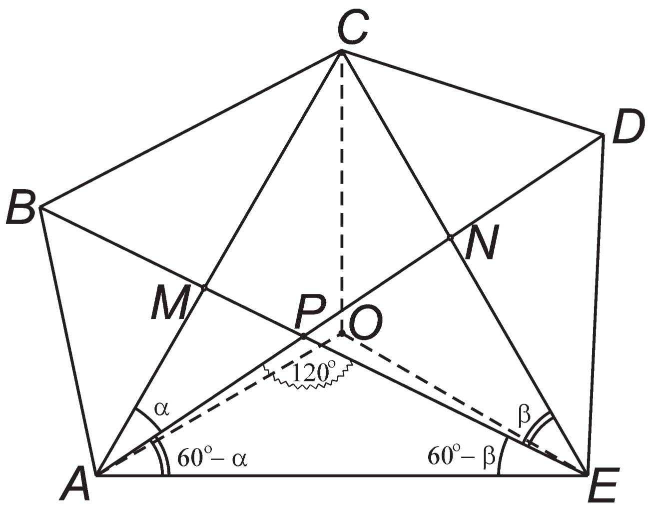


Решение. Очевидно, что K — точка пересечения серединного перпендикуляра отрезка AB с прямой CD. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Обозначим через L точку пересечения серединного перпендикуляра отрезка CD с прямой AB. Достаточно доказать, что $CD : NL = AB : MK$ $(*)$, тогда это будет означать подобие треугольников ABK и CDL. Обозначим через F точку пересечения прямых AB и CD и заметим, что треугольники FMK и FNL подобны (по двум углам). Тогда $NL : MK = FN : FM = CD : AB$, откуда и вытекает равенство $(*)$.

6. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P. Известно, что $AC = = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$, $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$. (**8** баллов)

Решение. Обозначим через O центр равностороннего $\triangle ACE$, через M — точку пересечения AC и BE, а через N — точку пересечения CE и AD. Пусть $\angle CAN = \alpha$, а $\angle CEM = \beta$. Тогда, поскольку в $\triangle APE$ сумма углов $120^\circ + (60^\circ - \alpha) + (60^\circ - \beta) = 180^\circ$, то $\alpha + \beta = 60^\circ$, значит $\angle AEM = \alpha$, $\angle EAN = \beta$. Поэтому имеем: $\triangle AEN = \triangle ECM$ по 2-му признаку равенства треугольников ($AE = EC$, $\angle AEN = 60^\circ = \angle ECM$, $\angle EAN = \beta = \angle CEM$). Из равенства треугольников: $AN = EM$, $\angle AMB = \angle EMC = \angle ANE = \angle CND$.

Итак, остаётся доказать, что $ND = MB$.



Применим поворот вокруг точки O на 120° по часовой стрелке. Тогда A перейдёт в C, C перейдёт в E, а значит отрезок AC перейдёт в отрезок CE, причём точка M отрезка AC перейдёт в точку N отрезка CE (так как $CM = EN$). Более того, луч MB перейдёт в луч ND (так как $\angle AMB = \angle CND$). Во что же перейдёт точка B? Допустим, что она перейдёт в точку B' (принадлежащую лучу ND), отличную от точки D. Два случая: или B' между N и D, или D между N и B'. Но в первом из этих случаев $AB + BC = CB' + B'E < CD + DE$, а во втором $AB + BC = CB' + B'E > CD + DE$. Получили противоречие условию, из которого следует, что B' совпадает с точкой D, то есть $ND = NB' = MB$.

Доказано, что $AN = EM$, $ND = MB$, отсюда следует: $AD = EB$, что и требовалось доказать.

Задачи для 10 класса

1. При каких значениях a разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3? (**4** балла)

Решение. Ясно, что $a \neq 0$. Обозначим корни уравнения через x_1 и x_2. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{a}\,, \\ x_1 x_2 = -\frac{2}{a}\,, \\ x_1 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Выразим x_1 и x_2 из 1-го и 3-го уравнений и подставим их выражения $x_1 = \dfrac{3a-1}{2a}$, $x_2 = -\dfrac{3a+1}{2a}$ во второе уравнение; получим уравнение относительно a:

$$9a^2 - 8a - 1 = 0\,.$$

Решая его, найдём $a = 1$ или $a = -\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left\{1, -\dfrac{1}{9}\right\}$.

2. Найдите четырёхзначное простое число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.
(**6** баллов)

Решение. Разность прогрессии может быть равной лишь 1, -1, 2, -2. Чётной цифрой число оканчиваться не может. Поэтому оно должно начинаться с чётной цифры (если разность 1 или -1) или нечётной цифры (если разность 2 или -2). Возможны следующие варианты: 2345, 4567, 6789, 8765, 6543,4321,1357, 3579, 9753, 7531.

2345, 8765 делятся на 5; 6789, 6543, 3579, 9753 делятся на 3; 4321 делится на 29; 1357 делится на 23; 7531 делится на 17.

Среди них единственное простое число 4567.

Ответ: 4567.

3. Многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\,,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, не имеет целых корней. Доказать.
(**7** баллов)

Решение. Обозначим данный многочлен через $P(x)$. Отметим, что $P(0) = a_n$, а $P(1) = {}$ $= a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Пусть $P(x_0) = 0$. Если x_0 чётно, то разность $P(x_0) - P(0)$ чётна — противоречие условию. Если x_0 нечётно, то разность $P(x_0) - P(1)$ чётна — также противоречие. Полученные противоречия показывают, что x_0 не может быть целым числом, что и требовалось доказать.

4. a, b, c — любые простые числа. Доказать, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

(**8** баллов)

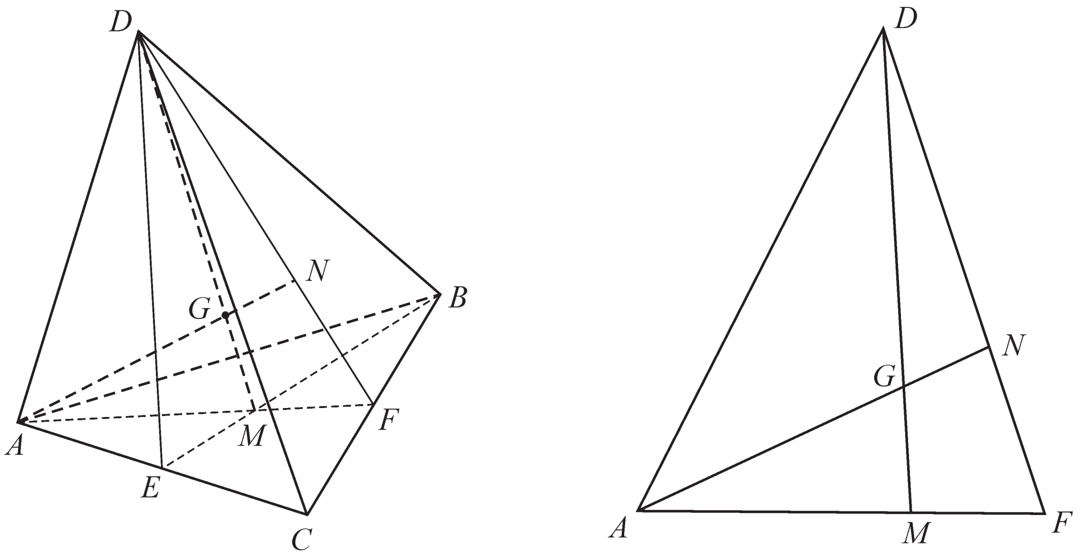
Решение. Пусть $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$. Тогда левая часть
$S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+z-y}{y} + \dfrac{x+y-z}{z} + \dfrac{y+z-x}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} - 3\right)$. Так как
$\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2\,,\ \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x} \geqslant 2\,,\ \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y} \geqslant 2\,,$ то $S \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot(6-3) = \dfrac{3}{2}$.

5. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P. Известно, что $AC = = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$, $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$. (**8** баллов)

Решение. См. решение задачи № 6 для 9 класса.

6. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в ней в одном и том же отношении; найдите это отношение.
(**7** баллов)

Решение. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр, M и N — центры тяжести (точки пересечения медиан) граней ABC b DBC соответственно, F — середина DC, $G = AN \cap DM$.



Найдём $DG : GM$. Проще всего сделать это с помощью теоремы Менелая, применённой к $\triangle DFM$ и секущей AN:

$$\frac{DG}{GM} \cdot \frac{MA}{AF} \cdot \frac{FN}{ND} = 1\,,$$

а поскольку $MA : AF = 2 : 3$, $FN : ND = 1 : 2$, то $DG : GM = 3 : 1$. Аналогично $AG : GN = = 3 : 1$.

Обозначая через E середину AC, $G' = BK \cap DM$ (где K — центр тяжести $\triangle ACD$, т. е. точка, делящая его медиану DE в отношении $2 : 1$), аналогично находим: $DG' : G'M = = 3 : 1$. Таким образом, точки G и G' совпадают. Точно так же доказывается, что и четвёртый отрезок, соединяющий вершину C с центром тяжести $\triangle ABD$, проходит через точку G.

Замечание. Вместо теоремы Менелая можно было применить подобие треугольников, сделав некоторые дополнительные построения.

Ответ: $3 : 1$.

Задачи для 11 класса

1. Сколько положительных чисел есть среди 2014 первых членов последовательности $\sin 1^\circ, \sin 10^\circ, \sin 100^\circ, \sin 1000^\circ, \sin 10000^\circ, \ldots$? (**4** балла)

Решение. Первые три числа положительны, четвёртое — отрицательно:

$$\sin 1000^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 80^\circ) < 0.$$

Далее, при $n > 3$ имеем: $10^n - 1000 = 10^3(10^{n-3} - 1) = 25 \cdot 40 \cdot (10^{n-3} - 1)\,.$
$10^{n-3} - 1$ делится на 9, поэтому $10^n - 1000$ делится на 360. Все члены последовательности, начиная с четвёртого, совпадают с $\sin 1000^\circ$ и, следовательно, отрицательны.

Ответ: 3.

2. Модули всех корней уравнений $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ меньше единицы. Доказать, что модули корней уравнения

$$x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$$

тоже меньше единицы. (**4** балла)

Решение. Если $|x| \geqslant 1$, то левые части обоих данных уравнений положительны; в этом можно убедиться, например, строя графики левых частей уравнений и учитывая, что пересечение этих парабол с осью Ox — это точки на интервале $(-1; 1)$, а ветви парабол направлены вверх. Полусумма левых частей обоих уравнений (то есть левая часть третьего уравнения) тоже положительна при $|x| \geqslant 1$.

3. Найдите четырёхзначное число, которое в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. (**5** баллов)

Решение. Если искомое число обозначим через $\overline{abcd}$, то по условию задачи получим равенство:

$$4 \cdot (1000a + 100b + 10c +) = 1000d + 100c + 10b + a\,. \qquad (1)$$

$a = 2$, так как в противном случае в правой части получится пятизначное число. Так как $4d$ оканчивается на 2, то $d = 8$. Подставляем эти данные в равенство (1):

$$4 \cdot (2000 + 100b + 10c + 8) = 8000 + 100c + 10b + 2\,. \qquad (2)$$

Отсюда $4 \cdot (10b + c) + 3 = 10c + b \iff 13b + 1 = 2c$. Данное уравнение имеет единственное решение (в целых числах, не превышающих 9): $b = 1$, $c = 7$.

Ответ: 2178.

4. Доказать, что $\sin(\cos\alpha) < \cos(\sin\alpha)$ при всех действительных α. (**10** баллов)

Решение.

а) $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, тогда, как известно, $\sin x \leqslant x$. Если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin x < x$; взяв $x = \cos\alpha$, получим: $\sin(\cos\alpha) < \cos\alpha < \cos(\sin\alpha)$, так как $\cos x$ убывает на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Если же $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, $\cos(\sin\alpha) = 1$. откуда $\sin(\cos\alpha) = \sin 1 < 1 = \cos(\sin\alpha)$.

б) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Так как $\cos\alpha \leqslant 0$, то $\sin(\cos\alpha) \leqslant 0 < \cos(\sin\alpha)$.

в) Из свойств чётности косинуса и нечётности синуса неравенство справедливо при $\alpha \in [-\pi; 0)$, а из периодичности обеих функций с основным периодом 2π оно справедливо при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

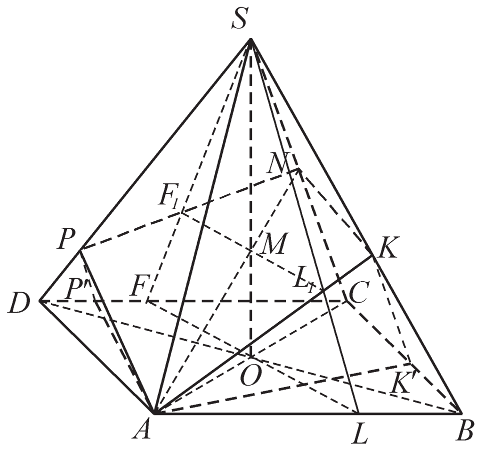
5. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P. Известно, что $AC = = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$, $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$. (**7** баллов)

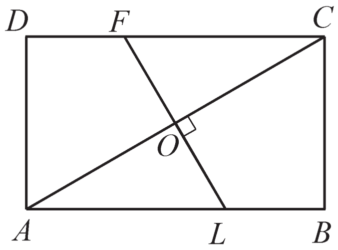
Решение. См. решение задачи № 6 для 9 класса.

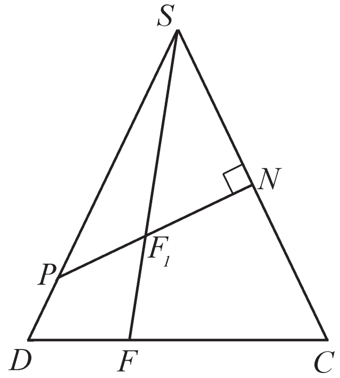
6. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Боковые рёбра пирамиды равны между собой. Высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Через вершину A проведено сечение плоскостью, перпендикулярной ребру SC. Найдите площадь сечения. (**10** баллов)

Решение. Сначала построим изображение пирамиды и сечения. Предварительно найдём: $AC = \sqrt{AB^2 + DC^2} = 2a \quad \Rightarrow \quad SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = 2a$ (здесь O — центр основания, то есть проекция вершины S). Так как $\triangle SAC$ равносторонний, то его высота AN совпадает с медианой; таким образом, если N — середина SC, то $AN \perp SC$ (см. рисунок на следующей странице).

Далее, проводя через точку O в плоскости ABC $FL \perp AC$, а через точку M пересечения AN и SO — отрезок $F_1L_1 \parallel FL$ (где $F_1 \in SF$, $L_1 \in SL$), соединим точку N с точкой F_1, получим $P = SD \cap NF_1$; аналогично $K = SB \cap AL_1$. $AKNP$ — искомое сечение. Разумеется, что $NP \perp SC$, $NK \perp SC$ (это можно было бы использовать в построении, но тогда, для верности построения, надо было бы заранее узнать отношения, в которых точки P и K делят рёбра; гораздо более просто узнать $DF : FC = 1 : 2$).







Идея нахождения площади сечения: рассмотреть в плоскости основания четырёхугольник $AK'CP'$, который проектируется ортогонально на $AKNP$, и использовать угол между плоскостями основания и сечения, а также формулу $S' = S \cdot \cos\varphi$, выражающую площадь прекции плоской фигуры через площадь самой фигуры. Ясно, что $PP' \parallel KK' \parallel NC$.

Остаётся найти отношения, в которых точки P' и K' делят CD CB соответственно.

Из $\triangle CDS$: $\cos\angle SSD = \dfrac{(2a)^2 + (2a)^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \dfrac{5}{8}$, тогда из $\triangle NSP$: $SP = \dfrac{SN}{\cos\angle CSD} = \dfrac{8}{5}a$. Отсюда $SP : PD = 4 : 1$, а следовательно, и $CP' : P'D = 4 : 1$. Аналогично находим: $\cos\angle CSB = \dfrac{7}{8}$, $SK = \dfrac{SN}{\cos\angle CSB} = \dfrac{8}{7}a$, тогда $SK : KB = 4 : 3$, а следовательно, и $CK' : K'B = 4 : 3$.

Находим площади: $S_{AK'CP'} = S_{\triangle AK'C} + S_{\triangle AP'C} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{24a^2\sqrt{3}}{35}$,

$$S_{AKNP} = S_{AK'CP'} \cdot \cos\varphi\,,$$

где φ — угол между плоскостью основания и плоскостью сечения, то есть $\varphi = (\widehat{SC, SO}) = 30^\circ$. Отсюда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{24a^2\sqrt{3}}{35} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{36}{35}\,a^2\,.$$

Ответ: $\dfrac{36}{35}\,a^2$.