

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Марфин Е.А., Овчинников М.Н.

Упругие волны в насыщенных пористых средах
(учебно-методическое пособие)

Казань 2012

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

методической комиссии физического факультета

Протокол № от ноября 2012 г.

заседания кафедры общей физики

Протокол № 2 от 01 октября 2012 г.

Авторы-составители:

канд. техн. наук, ст. преп. Е.А. Марфин

доктор физ. мат наук, проф. М.Н. Овчинников

Упругие волны в насыщенных пористых средах: Учебно-методическое пособие / Марфин Е.А., Овчинников М.Н. – Казань: Казанский университет, 2012. – 28 с.

В работе приведены сведения об особенностях распространения акустических и сейсмических волн в горных породах и насыщенных пористых средах; излагаются методы определения основных упругих характеристик флюидонасыщенных пористых сред. Учебно-методическое пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению «радиофизика» профиля «радиофизические методы по областям применения: геофизика», а также может быть использовано при чтении курсов на факультете повышения квалификации.

Содержание

Введение	4
1. Упругие характеристики пористой среды	5
2. Упругие волны в насыщенной пористой среде	11
3. Распространение звуковых колебаний в пористой среде, насыщенной двумя флюидами	16
Контрольные вопросы	27
Литература	28

Введение

Эффективное использование акустических и гидродинамических методов воздействия на пласты горных пород при разработке нефтяных месторождений предполагает знание процессов и явлений, протекающих в насыщенных пористых средах, в том числе при распространении упругих волн.

Основные понятия акустики, вопросы распространения, отражения, преломления и рассеяния звуковых волн в сплошных однофазных средах, в том числе и горных породах, рассматриваются во многих работах (см., например, пособие [4]). Однако, если мы будем исследовать процесс распространения упругих колебаний в насыщенных пористых средах, будут ли наблюдаться какие-либо особенности по сравнению с распространением этих волн в однофазных средах? Оказалось, что при распространении упругих колебаний в насыщенных пористых средах, для которых Я.И. Френкель [6] и М. Био [7] ввели двухфазную модель среды, помимо известных типов продольных и поперечных волн в жидкостях и твердых телах, возникают более сложные типы волн, что обусловлено различиями в упругих характеристиках твердой и жидкой фаз.

Основной вклад в понимание этих особенностей распространения упругих волн в насыщенных пористых средах внесли М. Био [7] и В.Н. Николаевский [8].

В данном пособии приведены сведения об особенностях распространения упругих колебаний в флюидонасыщенных пористых средах, в том числе в пористых средах, насыщенных разными жидкостями. Приводятся данные об упругих характеристиках таких сред.

1. Упругие характеристики пористой среды

Основными упругими характеристиками горных пород являются модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона. Для описания упругих характеристик пористых сред применяют различные методы и модели, наиболее распространенными из которых являются уравнения Гассмана (Gassmann F. [11]). Последние описывают упругие характеристики модели пористой среды, состоящей из твердой и жидкой (газообразной) фаз. Твердая фаза формирует жесткий каркас, который характеризуется своими макроскопическими модулями упругости. Жидкая (газообразная) фаза заполняет пустотное пространство полностью. Применительно к продуктивным пластам нефтяных месторождений твердая фаза представлена кристаллами или зернами породообразующих минералов, а жидкая – флюидами, содержащимися в пористом пространстве породы. Основным предположением является то, что пустотное пространство распределено равномерно внутри такой среды и его свойства не зависят от направления (изотропны). Характеристикой пустотного пространства является пористость – отношение объема пустот к объему всего образца: $n=V_{por}/V$.

При выводе уравнений Гассмана выбирается такой однородный изотропный материал, который при приложенной нагрузке «в среднем» ведёт себя так же, как и изучаемая микронеоднородная пористая среда. Рассматриваемая в модели Гассмана двухфазная система характеризуется следующими параметрами:

- пористость: n ;
- эффективные упругие модули насыщенного материала: K, G, ρ ;
- упругие модули твердой фазы (минерального вещества), слагающей скелет: K_m, G_m, ρ_m ;
- упругие модули флюида: K_f, ρ_f ;
- эффективные упругие модули каркаса ненасыщенной породы: K_{dry}, G_{dry} .

Последние зависят как от свойств минерального вещества, так и от многих других факторов (геометрии порового пространства, характера контактов зерен, эффективного давления и др.) и, как правило, не могут быть вычислены явно [10]. Система уравнений Гассмана связывает указанные характеристики между собой, что позволяет выражать одни параметры через другие при решении различных прикладных задач (например, задача о вытеснении флюида).

Основное допущение, используемое в данной модели, состоит в предположении о независимости модуля сдвига G двухфазной среды от

свойств флюида-порозаполнителя [11]. Поэтому $G = G_{dry}$ (однако $G_{dry} \neq G_m$). Плотность флюидонасыщенной пористой среды является средневзвешенной величиной между плотностью твердой фазы и плотностью флюида. Уравнения Гассмана представляют собой выражения для модуля всестороннего сжатия пористых насыщенных сред. В общем виде данное выражение имеет следующий вид:

$$F(K, K_m, K_{dry}, K_f, n)=0. \quad (1.1)$$

Любой из пяти параметров, входящих в это уравнение в качестве аргумента, может быть выражен через остальные четыре.

Явная форма уравнений Гассмана для расчета эффективных упругих модулей насыщенного материала представляется в виде:

$$K = K_{dry} + \frac{\left(1 - \frac{K_{dry}}{K_m}\right)^2}{\frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_m} - \frac{K_{dry}}{K_m^2}}; \quad (1.2)$$

$$G = G_{dry};$$

$$\rho = \rho_m(1-n) + \rho_f n.$$

Данные уравнения позволяют оценить степень влияния упругих параметров флюида-порозаполнителя на свойства породы. С их помощью могут быть рассчитаны остальные упругие характеристики насыщенного пористой среды. Например, скорость:

$$\text{продольных волн: } V_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}; \quad (1.3)$$

$$\text{поперечных волн: } V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{G_{dry}}{\rho}}. \quad (1.4)$$

Следует отметить, что, несмотря на то, что свойства флюида не влияют на модуль сдвига породы, скорость поперечных волн меняется при смене типа флюида за счет влияния плотности.

Упругие модули «сухого» скелета. Для расчета упругих характеристик насыщенного пористого материала с использованием явной формы уравнения Гассмана необходимо задавать параметры K_{dry} и G_{dry} . Чаще всего пользуются эмпирическими зависимостями. Широкое применение нашла обобщенная модель критической пористости Нура [10], которая хорошо согласуется с экспериментами и подтверждена результатами численного моделирования:

$$K_{dry} = K_m \left(1 - \frac{n}{n_{cr}} \right)^a, \quad n < n_{cr} \quad (1.5)$$

$$G_{dry} = G_m \left(1 - \frac{n}{n_{cr}} \right)^b, \quad n < n_{cr}. \quad (3.6)$$

Здесь n_{cr} – критическая пористость, а a и b – управляющие коэффициенты, калибруемые на результаты измерений.

Физический смысл критической пористости – это такой относительный объем пустот, выше которого материал теряет жесткость (например, точка перехода от песчаника к песку или от насыщенной породы к взвеси). Для значения пористости выше критического принимается $K_{dry}=G_{dry}=0$. При этом уравнение Гассмана переходит в уравнение Вуда (Wood) [11].

Значения параметров a и b зависят от геометрии пустотного пространства, характера контакта и формы зерен и других характеристик скелета породы.

Как правило, в состав твердой фазы реальных горных пород входят несколько породообразующих минералов [5]. В этом случае для оценки упругих модулей минерального вещества K_m и G_m используют различные методики осреднения. Как правило, хорошие результаты дает метод самосогласованного поля [11].

Для оценки модуля всестороннего сжатия флюида при его многокомпонентном составе может быть использовано уравнение Вуда. Однако следует иметь в виду, что данное уравнение применимо лишь к несмешивающимся компонентам. Например, для оценки свойств пластовой нефти, содержащей определенное количество природного газа в растворенном состоянии, оно может давать большие погрешности.

Основные допущения и область применимости. Уравнения Гассмана могут быть использованы как для определения статических модулей упругости, так и в динамическом случае (например, для оценки скоростей распространения сейсмических волн в горных породах). При выводе

уравнений используются следующие допущения, ограничивающие область применения данной теории:

- минеральный скелет и флюид движутся вместе (без проскальзывания). Изменение элементарного объема породы складывается из изменения объема флюида и объема твердой фазы;
- свойства флюида не влияют на модуль сдвига породы;
- напряжение в породе складывается из напряжения в скелете и давления во флюиде (порового давления).

Первое допущение накладывает ограничения на частотный диапазон колебаний при использовании уравнений Гассмана в динамических задачах. При достаточно малой длине волны жидкая фаза будет «проскальзывать» относительно скелета породы. В результате будет наблюдаться частотная дисперсия скорости волн и диссипация энергии. Эти эффекты рассматриваются в рамках более общей теории Био-Николаевского [7, 8], из которой уравнения Гассмана могут быть получены как частный случай.

Частотный диапазон, в пределах которого теория Гассмана хорошо описывает экспериментальные данные, оценивают величиной, равной 10 % от резонансной частоты Био [7]:

$$f_{max} = 0.1 f_{Bio} = 0.1 \frac{\eta n}{2\pi k r_f}; \quad (1.7)$$

где η – динамическая вязкость флюида, k – коэффициент проницаемости (абсолютная проницаемость горной породы).

При более высокочастотных колебаниях в пористой и проницаемой насыщенной среде помимо продольных и поперечных волн возникает продольная волна второго рода.

Для большинства реальных горных пород резонансная частота Био существенно выше 20-30 кГц. Это позволяет использовать уравнения Гассмана при интерпретации данных сейсморазведки и акустического каротажа.

В таблице 3.1 приведен пример оценки граничной частоты применимости уравнений Гассмана для некоторых значений пористости и проницаемости реальных водонасыщенных горных пород.

Граничная частота f_{max} (кГц):				
проницаемость k (мД)	пористость			
	10%	20%	30%	40%
1	882	1764	2646	3528
10	88	176	265	353
100	9	18	27	35

При решении ряда прикладных задач удобно пользоваться другими представлениями уравнений Гассмана, которые могут быть выведены из основной формы.

1. Неявная форма

$$\frac{K}{K_m - K} = \frac{K_{dry}}{K_m - K_{dry}} + \frac{K_f}{n(K_m - K_f)}; \quad (1.8)$$

2. Форма Ройсса (Reuss)

$$\frac{K}{K_m - K} = \frac{K_{dry}}{K_m - K_{dry}} + \frac{K_R}{K_m - K_R}, \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{K_R} = \frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_m}; \quad (1.10)$$

3. Форма Био (Biot)

$$K = K_{dry} + B^2 M,$$

$$\frac{1}{M} = \frac{B-n}{K_m} + \frac{n}{K_f}, \quad (1.11)$$

$$B = 1 + \frac{K_{dry}}{K_m}.$$

Величина коэффициента Био B определяется свойствами пустотного пространства и характеризует отношение изменения объема пор к изменению общего объема породы при деформации.

Основным недостатком практического применения уравнений Гассмана является необходимость задания упругих свойств скелета (K_{dry} , G_{dry}), которые зависят от многих факторов и часто трудно поддаются оценке. Необходимо также учитывать ограничение по частотному составу – при высоких частотах упругих колебаний, больших, чем частота Био, уравнение Гассмана плохо описывает упругие характеристики насыщенных пористых сред вследствие не учета движения флюида относительно твердой фазы.

В работе D.L.Johnson с соавторами [12] приведены экспериментальные данные, которые подтверждают выдвинутую ими гипотезу о взаимосвязи скоростей и коэффициентов затухания различных упругих волн с параметрами пористой среды (пористость, извилистость, проницаемость и размер пор), основанную на теории Био для пористой среды, насыщенной одним типом флюида с учетом взаимного движения твердой и жидкой фаз.

Достаточно полный обзор макроскопических уравнений пороупругости содержится в статье [3].

2. Упругие волны в насыщенной пористой среде

Фундаментальным свойством флюидонасыщенной пористой среды является то, что в такой среде, в отличие от однофазной, могут распространяться упругие продольные волны двух типов (быстрая и медленная), а также поперечная волна (Био [7]).

Параметры продольной волны первого типа (рода) P_1 определяются сжимаемостью твердой и жидкой фаз и пористостью, и при этом каждая фаза (материала скелета породы и флюид) деформируется независимо друг от друга. Волну P_1 в мягких средах (типа песка, грунта) Николаевский [8] назвал волной давления. Флюид и скелет в волне P_1 двигаются синфазно.

Существование продольной волны второго рода P_2 в мягких средах обусловлено наличием движений твердых частиц в скелете породы относительно жидкости, в том числе и при объемных деформациях скелета. Исследования Био [7] свидетельствуют о том, что в волне P_2 скелет и флюид двигаются в противофазе.

При определенном отношении упругих и инерционных свойств жидкости и скелета породы возможен случай, когда амплитуды колебательных смещений и скоростей фаз в волне P_1 равны. В этом случае для волны P_2 отношение амплитуд смещений скелета породы A_T и жидкости $A_{Ж}$ равно [7]:

$$A_T / A_{Ж} = -\rho_{Ж} / \rho_T, \quad (2.1)$$

где $\rho_{Ж}$, ρ_T – плотности соответственно жидкости и материала скелета.

Пористые среды являются диссипативными и обладают дисперсией [1,2,9]. В связи с этим под действием вынуждающей силы среда не сразу приходит в движение, а в течение некоторого времени релаксации τ . Оно определяется в основном процессами обмена между фазами: вязко – инерционными (обмен импульса между фазами) и тепловыми (выравнивание температуры). Диапазон изменения τ в горных породах довольно широк – от $2 \cdot 10^{-3}$ с для песка до 10^{-9} с для песка и глины.

В случае, когда период колебаний T намного больше времени релаксации τ , среда успевает следовать за возмущением. Например, в поперечной волне при $\tau \ll T$ вязкая жидкость увлекается скелетом в сдвиговые перемещения. При этом происходит обмен импульсом между фазами. При $\tau \gg T$ среда «заморожена»; она в целом не успевает следовать за возмущением. Движения жидкости нет, и обмен импульсом между фазами не происходит. Вслед за

волной двигается только жесткий скелет породы. Это приводит к тому, что динамическая плотность среды в сдвиговой волне уменьшается до значения $\rho_T \times (1-n)$, где n – пористость.

Волна первого рода P_1 характеризуется инерционной и термической релаксацией с временами релаксации τ_{II} и τ_T соответственно, что обусловлено различием инерционных и тепловых свойств фаз. Когда время инерционной релаксации $\tau_{II} \ll T$, в волне P_1 равны объемные скорости твердой w и жидкой u фаз ($w = u$). Массовые скорости $\rho_T w$ и $\rho_{Ж} u$ в такой волне равны при $\tau_{II} \gg T$ ($\rho_T w = \rho_{Ж} u$).

Аналогично инерционной релаксации, тепловая релаксация обусловлена тем, что при $\tau_T \ll T$ теплообмен между фазами происходит мгновенно и температуры фаз равны ($T_1 = T_2$). При $\tau_T \gg T$, температуры фаз не успевают выравниваться. В этом случае равны выражения $(c_1 / \alpha_1) T_1$ и $(c_2 / \alpha_2) T_2$. Температуры при деформации различны вследствие неодинаковых коэффициентов объемного расширения α_1, α_2 и теплоемкостей фаз c_1, c_2 . В первом приближении тепловое расширение фаз влияет только на объемные деформации, то есть на волну P_1 .

Термическая и инерционная релаксация определяет поглощение энергии упругих волн. Коэффициент поглощения волны P_1 в насыщенных жидкостью пористых средах намного меньше коэффициента поглощения волны P_2 . Поэтому на значительные расстояния от источника колебаний в таких средах распространяются в основном волны первого рода. В сухих газонасыщенных грунтах коэффициент затухания волны P_1 , наоборот, велик, в них распространяется медленная волна второго рода P_2 . Следует отметить, что в газонасыщенных средах волна P_2 распространяется с очень малым затуханием и при росте сцементированности породы кинематические параметры волны стремятся к параметрам в сплошном материале скелета породы. В этом случае продольная волна характеризуется небольшой скоростью распространения и большим затуханием из-за значительной сжимаемости газа. Коэффициент сжимаемости волны P_1 в газонасыщенной среде примерно в 10 – 15 раз больше, чем в насыщенной жидкостью среде. Волну первого рода в сухих горных породах в связи с этим также называют волной «по газу» или «воздушной» волной.

Суммарный коэффициент поглощения волны P_1 в насыщенных жидкостью средах при малых частотах (ниже критической ω_{KP}) пропорционален квадрату частоты ω^2 , а при больших – квадратному корню

из частоты $\sqrt{\omega}$. Для волны P_2 коэффициент поглощения всегда пропорционален $\sqrt{\omega}$. При малых частотах волна P_2 распространяется с очень малой скоростью и большим затуханием.

Общая картина возмущений в насыщенных жидкостью пористых средах может быть представлена в следующем виде: первоначально распространяется волна первого рода, за фронтом которой происходят объемные деформации (с синфазным движением флюида и скелета). Далее распространяется поперечная сдвиговая волна, и за её фронтом идут деформации чистого сдвига. Последней распространяется вторая продольная волна, за фронтом которой осуществляются уже объемные и сдвиговые (синфазные) деформации среды.

Изложенные выше отдельные положения теории распространения волн в насыщенных пористых средах применимы лишь в том случае, когда движение жидкости в порах подчиняется закону Дарси. Оценить критическую частоту, при которой справедлив закон Дарси, можно по формуле Био [7]:

$$\omega_{KP} \approx 4\nu / \pi d^2. \quad (2.2)$$

Здесь $\nu = \mu / \rho$ – кинематическая вязкость, d – диаметр зерен. При диаметре зерен $d \approx 10^{-3}$ см для водонасыщенной среды получаем $\omega_{KP} \approx 13$ кГц. В случае насыщения породы нефтью ω_{KP} увеличится в соответствии с ростом вязкости.

Следует заметить, что теорию Био–Николаевского [7,8] целесообразно также применять для описания распространения в пористых средах упругих полей больших интенсивностей. Это связано с тем, что в ней исходные уравнения движения, неразрывности, а также сил взаимодействия фаз получены путем усреднения фаз по объему, намного превышающему объем поры. Такое усреднение справедливо для амплитуды смещения, соизмеримой с диаметром пор. Если считать амплитуду смещения бесконечно малой по сравнению с характерным размером пор, то усреднение можно выполнять лишь по площади сечения объема.

Поскольку основные эффекты воздействия акустическим полем связаны с процессами, происходящими в жидкостях, определенный интерес представляет оценка количества упругой энергии, попадаемой в жидкость. Для приблизительной оценки можно считать, что энергия волны в начальный момент времени состоит из полной упругой энергии деформации среды W , которая в работе Био [7] представлена в виде:

$$2W = \sigma_{ij}e_{ij} - np\xi, \quad (2.3)$$

где e_{ij} – тензор деформации скелета, ξ – деформация жидкости, σ_{ij} – тензор напряжения, p – давление.

Определим энергию деформации через напряжение и давление в пористой среде. Для этого используем связь напряжения и давления с деформацией в жидкости и скелете породы через упругие модули Био, подставив эти значения в формулу (2.3). Полученное выражение для энергии деформации единицы объема изотропной среды с учетом связи коэффициентов Био с коэффициентами Ламэ λ_1 , λ_2 и сжимаемости фаз β_T , β_J могут быть представить в следующем виде:

$$2W = \frac{\sigma_{11}^2}{(1-n)(2\lambda_2 + \lambda_1)} - \frac{2\varepsilon}{2\lambda_2 + \lambda_1} p \cdot \sigma_{11} + \left[\beta + \frac{(1-n)\varepsilon^2}{2\lambda_2 + \lambda_1} \right] \cdot p^2 \quad (2.4)$$

Для характерных значений параметров водонасыщенного песчаника равны: параметр сцементированности $\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$, $\rho_T \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, $\rho_J \approx 10^{-3}$ кг/м³, $n \approx 0,36$, $\beta_J = 0,44$ ГПа⁻¹, $\beta_T = 0,03$ ГПа⁻¹, $\beta \approx 0,17$ ГПа⁻¹ формула (2.4) примет вид:

$$2W = 0,75 \cdot 10^{-7} \cdot \sigma_{11}^2 - 0,3 \cdot 10^{-9} \sigma_{11} \cdot p + 0,173 \cdot 10^{-9} \cdot p^2. \quad (2.5)$$

Здесь значения p , σ_{11} взяты в паскалях (Па).

Полагая, что суммарная энергия продольных волн составляет единицу, оценим количество упругой энергии в каждой волне. Оценим среднее значение плотности упругой энергии в поровой жидкости для каждой волны по формуле $W_J \approx k \beta_J p^2$.

Как упоминалось выше, аналитического решения системы уравнений для акустических волн в пористой среде нет. Существуют аналитические решения для распространения постоянного возмущения в слабоцементированной пористой среде в виде небольших разрывов (скачков) давлений и напряжений.

Согласно приведенным выше формулам, в случае приложения напряжения σ_{11} на границе среды только к скелету породы (проницаемый поршень) величина скачка напряжения в волне первого рода имеет ε порядок от σ_{11} , а величина скачка давления – порядок σ_{11} . В волне P_2 скачки давления

и напряжения имеют порядок σ_{11} . Поэтому в волне P_1 содержится менее 1 % всей упругой энергии. В волне второго рода содержится 99 % всей энергии, из которых на долю жидкости приходится лишь сотые доли процента.

Если прилагать нагрузку (давление) p только к жидкости (жидкий поршень), то величина скачка давления во второй волне будет иметь порядок малости ε . В то же время в первой волне давление будет конечным (p). При этом в волне первого рода сосредоточено более 99 % всей энергии, которая практически вся приходится на долю жидкости. В волне второго рода заключено менее 1% всей энергии. При таком способе нагрузки большая доля упругой энергии P_1 волны содержится в жидкости.

Если на границе мягкой пористой среды заданы давление p и напряжение σ (жесткий поршень), то в волне первого рода скачок давления имеет порядок $p_1 \approx -\sigma_{11} + p$, а в волне второго рода $p_2 \approx \sigma_{11} - O[\varepsilon(\sigma_{11} - p)]$. Здесь $O[\varepsilon(\sigma_{11} - p)]$ означает порядок малости величины в скобках. В волне первого рода для этого случая заключено 80 – 90% упругой энергии, которая частично сосредоточена в жидкости. На долю волны второго рода приходится 10 – 20% упругой энергии, из которой в жидкости находится сотая часть энергии волны.

Из приведенных расчетов можно сделать вывод, что распределение упругой энергии между фазами зависит от способа приложения нагрузки к жидкости. Оптимальным методом передачи упругой энергии в поровую жидкость является приложение нагрузки к жидкости (жидкий поршень) [9]. Возбуждение акустических колебаний от источника, расположенного в необсаженной скважине, наиболее близко к случаю приложения нагрузки к жидкости. В интервалах перфорации обсаженной скважины способ приложения нагрузки при возбуждении акустических волн приближается к «жесткому поршню». Реальные условия, при которых упругая энергия попадает в поровую жидкость, зависят не только от способа приложения нагрузки, но и от частотно – пропускной характеристики системы: промывочная жидкость, обсадная колонна, цементный камень.

3. Распространение звуковых колебаний в пористой среде, насыщенной двумя флюидами

Наиболее адекватное описание распространения упругих волн в пористых средах дает теория Френкеля-Био [6,7]. В.Н. Николаевским [8] в рамках этой теории было приведено решение задачи акустических колебаний (расчет скоростей и коэффициентов затухания акустических колебаний в пористых средах насыщенных одним флюидом). Однако, если пористая среда насыщена не одной, а несколькими жидкостями (например, водой и нефтью), задача сильно усложняется тем, что присутствует дополнительное межфазовое взаимодействие.

Анализ распространения звуковых колебаний начнем с вывода осредненного уравнения движения жидкости в сплошной пористой среде насыщенной двумя флюидами. В каждой микроточке заполненной этими двумя жидкостями справедливы исходные уравнения гидродинамики обычной вязкой жидкости

$$\rho_1 \frac{dU_1}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} p_1 = \rho_1 g \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 U_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho_2 \frac{dU_2}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} p_2 = \rho_2 g \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_2 U_2 = 0 , \quad (3.4)$$

где g - ускорение силы тяжести, ρ_1 и ρ_2 - плотности жидкости, p_1 и p_2 - давление в жидкости соответствующее компонентам тензора напряжений.

Осредняя эти уравнения по объему, которым занята жидкая фаза, используя в преобразованиях теорему Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v} dV = \int_S v_i n_i dS ,$$

где S – поверхность, содержащая в себе произвольный объем V , n_i – компоненты нормали к поверхности S , получим искомое уравнение неразрывности, справедливое уже для макропотока:

$$\frac{\partial ms\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ms\rho_1 U_1 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial m(1-s)\rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} m(1-s)\rho_2 U_2 = 0 . \quad (3.6)$$

Аналогичные преобразования приводят к осредненному уравнению неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial (1-m)\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (1-m)\rho_0 U_0 = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение неразрывности импульса во всей среде в целом запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_0(1-m)U_0 + \rho_1 msU_1 + \rho_2 m(1-s)U_2 \} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \{ (1-m)\sigma_0 + msp_1 + m(1-s)p_2 \} + \\ & + \rho_0(1-m)U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \rho_1 msU_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \rho_2 m(1-s)U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0 . \end{aligned} \quad (3.8)$$

где σ_0 – истинные напряжения в твердой фазе.

Мы рассматриваем смещение в среде только в направлении оси x , считая среду однородной и изотропной, и не учитываем влияние силы тяжести на смещение частиц в среде. На границе соприкосновения двух жидкостей на жидкости действует сила капиллярного давления равного

$$p_c = p_2 - p_1 . \quad (3.9)$$

В общем случае $p_c = p_c(p_2, p_1, s)$, где s – насыщенность одной жидкой фазы.

Скорость смещения жидкой фазы подчиняется закону Дарси:

$$U_1 = -\frac{kk_1}{\mu_1} \text{grad } p_1 \quad (3.10)$$

$$U_2 = -\frac{kk_2}{\mu_2} \text{grad } p_2 . \quad (3.11)$$

Здесь k – проницаемость скелета, k_1 , k_2 – фазовые проницаемости жидкостей, μ_1 , μ_2 – вязкости жидкостей.

В общем случае фазовые проницаемости зависят от многих факторов и в частности от насыщенности. Эмпирическая зависимость фазовых проницаемостей от насыщенности, полученная Чарным И.А., равна для воды

$$k_1(s) = \begin{cases} 0, & s < 0.2 \\ \left(\frac{s-0.2}{0.8}\right)^{3.5}, & 0.2 \leq s < 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

для нефти

$$k_2(s) = \begin{cases} (0.85 \cdot s)^{2.8} \cdot (1 + 2.4 \cdot s), & 0 < s < 0.85 \\ 0, & 0.85 \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Рассмотрим упрощенную систему уравнений, описывающих распространение в среде слабых возмущений. Для таких движений можно принять, что плотности твердой фазы и жидкости изменяются по линейному закону

$$\frac{\rho_0 - \rho_0^0}{\rho_0^0} = \beta_0 (\theta_0 - \theta_0^0), \quad (3.14)$$

$$\frac{\rho_1 - \rho_1^0}{\rho_1^0} = \beta_1 (p_1 - p_1^0), \quad (3.15)$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_2^0}{\rho_2^0} = \beta_2 (p_2 - p_2^0) \quad (3.16)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – коэффициенты изотермической сжимаемости, θ_0 – первый инвариант тензора истинных напряжений, смещением за счет теплового расширения мы пренебрегли, считая происходящий процесс изотермическим.

Ограничимся теперь рассмотрением малых отклонений параметров пористой среды от их значений соответствующих стационарному состоянию, т.е. положим

$$m = m_0 + m'$$

$$\sigma_0 = \sigma_0^0 + \sigma_0'$$

$$p_1 = p_1^0 + p_1'$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= p_2^0 + p_2' & (3.17) \\
U_2 &= U_2^0 + U_2' \\
U_1 &= U_1^0 + U_1' \\
U_0 &= U_0^0 + U_0'
\end{aligned}$$

где U_0^0, U_1^0, U_2^0 - одного порядка или же еще более малые величины по сравнению с U_0', U_1', U_2' ; $m' \ll m_0$ и т.д. Указанное предположение о величинах U_0^0, U_1^0, U_2^0 позволяет принимать за стационарное состояние не только полный покой среды, но и медленное, например, фильтрационное установившееся движение.

Таким образом, линеаризованная система уравнений движения и неразрывности будет иметь вид

$$\begin{aligned}
(1-m)\left(\rho_0^0 \frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{ms}{1-m} \rho_1^0 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{m(1-s)}{1-m} \rho_2^0 \frac{\partial U_2}{\partial t}\right) - \\
- \frac{\partial}{\partial x} \left((1-m)\sigma_0 - msp_1 - m(1-s)p_2 \right) - \frac{\mu_1}{kk_1} m(1-m)(U_1 - U_2) - & (I)
\end{aligned}$$

$$- (1-s) \frac{\mu_2}{kk_2} m(1-m)(U_2 - U_1) = 0$$

$$\rho_1^0 \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\mu_1}{kk_1} m(1-m)(U_1 - U_0) + b(U_2 - U_1) = 0 \quad (II)$$

$$\rho_2^0 \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\mu_2}{kk_2} m(1-m)(U_2 - U_0) - b(U_2 - U_1) = 0 \quad (III)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\beta_0}{3} \frac{\partial \theta_0^f}{\partial t} - \beta_0(1-m)s \frac{\partial p_1}{\partial t} - \beta_0(1-m)(1-s) \frac{\partial p_2}{\partial t} - \\
- (1-m) \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0 & (IV)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} \rho_1 + \beta_1 \rho_1^0 ms \frac{\partial p_1}{\partial t} + ms \frac{\partial \rho_1 U_1}{\partial x} = 0 \quad (V)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} \rho_2 + \beta_2 \rho_2^0 m(1-s) \frac{\partial p_2}{\partial t} + m(1-s) \frac{\partial \rho_2 U_2}{\partial x} = 0 \quad (VI)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s) \quad (\text{VII})$$

$$\sigma_0 = (1 - m)(\lambda_1 x + 2\lambda_2 x + \beta_0 K(sp_1 + (1 - s)p_2)) \quad (\text{VIII})$$

где λ_1, λ_2 – первый и второй коэффициенты Ламе сухой пористой среды, K – модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды.

Для анализа распространения волн представим векторы скорости смещения твердой и жидких фаз в следующем виде

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi_0 + \text{rot } \Psi_0) \\ U_1 &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \Psi_1) \\ U_2 &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \Psi_2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ – скалярные, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 – векторные потенциалы смещения. Подстановка векторов смещения в систему уравнений (I)–(VIII), приводит к следующей системе для скалярных потенциалов смещения.

$$\begin{aligned} &\rho_0^0 \frac{\partial^4}{\partial x \partial t^3} \varphi_0 - (1 - m_0) \beta_0 K \left\{ s \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} p_1' + (1 - s) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} p_2' \right\} - \\ &- (1 - m_0)(\lambda_1 + 2\lambda_2) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} \varphi_0 + (1 - m_0)(\lambda_1 + 2\lambda_2) \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial x} m' + \\ &+ (1 - m_0) \beta_0 K \left(s \frac{\partial}{\partial t} p_1' + (1 - s) \frac{\partial}{\partial t} p_2' \right) \frac{\partial}{\partial x} m' = 0 \\ &m_0 \rho_1^0 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \varphi_1 - \frac{m_0^2 \mu_1}{k k_1(s)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \varphi_1 - p_1^0 \frac{\partial}{\partial x} m' = 0 \\ &m_0 \rho_2^0 \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \varphi_2 - \frac{m_0^2 \mu_2}{k k_2(s)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \varphi_2 - p_2^0 \frac{\partial}{\partial x} m' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_0 \beta_1^0 \frac{\partial}{\partial t} p_1 + \frac{\partial}{\partial t} m' + m_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \Phi_1 + \\
& + m_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial x} p_1' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial x} m' = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& m_0 \beta_2^0 \frac{\partial}{\partial t} p_2 + \frac{\partial}{\partial t} m' + m_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \Phi_2 + m_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_2 \frac{\partial}{\partial x} p_2' + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_2 \frac{\partial}{\partial x} m' = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - m_0) \beta_0 \left\{ s \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1' + (1 - s) \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_2' \right\} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} m' + (1 - m_0) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \Phi_0 + \\
& + \beta_0 (1 - m_0) (\lambda_1 + 2\lambda_2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \Phi_0 + \\
& + \beta_0^2 (1 - m_0) K \left\{ s \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1' + (1 - s) \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_2' \right\} + \\
& + \beta_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_0 (1 - m_0) (\lambda_1 + 2\lambda_2) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \Phi_0 + \\
& + (1 - m_0) \beta_0^2 K \left(s \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} p_1' + \right. \\
& \left. + (1 - s) \frac{\partial}{\partial t \partial x} p_2' \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \Phi_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} m' = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим плоские гармонические продольные волны, т.е. изучим решение этой системы при постановке выражений типа

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= \Phi_0^0 e^{i(\omega t - \eta x)} \\
\Phi_1 &= \Phi_1^0 e^{i(\omega t - \eta x)} \\
\Phi_2 &= \Phi_2^0 e^{i(\omega t - \eta x)} \\
p_1' &= p_1^0 e^{i(\omega t - \eta x)} \\
p_2' &= p_2^0 e^{i(\omega t - \eta x)} \\
m &= m' e^{i(\omega t - \eta x)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Подстановка этих соотношений приводит к системе алгебраических уравнений относительно $\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, p_1^0, p_2^0, m'$, которая имеет отличное от нуля решение, если величины ω , η удовлетворяют следующему дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{m_0}{2(1-m_0)} \frac{Q}{D} \rho_0 \beta_1 \beta_2 \frac{\omega^5}{\eta^5} - \left(\beta_0 \rho_0 + \frac{m_0 Q}{2D} (\lambda_1 + 2\lambda_2) \right) \frac{\omega^3}{\eta^3} + \\ & + \beta_0^2 K \rho_0 \frac{\omega^2}{\eta^2} + \beta_0 (1-m_0) [\lambda_1 + 2\lambda_2 - K] \frac{\omega}{\eta} + \\ & + \beta_0^2 (1-m_0) K (\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\mu_1 k_2 \rho_2 - \mu_2 k_1 \rho_1}{\mu_2 k_1 \beta_1 - \mu_1 k_2 \beta_2} \\ D &= s p_c + p_2' \\ p_2 &= \frac{\mu_2 k_1 \beta_1 p_c}{\mu_1 k_2 \beta_2 - \mu_2 k_1 \beta_1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$e^{i(\omega t - \eta x)} = e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - \delta x}, \quad \frac{\eta}{\omega} = \frac{1}{v} + i \frac{\delta}{\omega}. \quad (3.22)$$

Дисперсионное соотношение (3.21) представляет собой уравнение пятой степени относительно η/ω и имеет, соответственно, пять значений η/ω . Возможны некоторые случаи взаимного направления смещения разных фаз, реализованные в данной модели. Так, для рис. 3.1 (а), направления смещений твердой фазы и двух жидкостей совпадают; направление смещения твердой фазы противоположно направлению смещений жидких фаз, рис. 3.1 (г); направление смещения твердой фазы совпадает с направлением смещения одного флюида и противоположно направлению смещений другого, рис. 3.1 (б,в).



Рис. 3.1.

Из сопоставления выражения (3.22) и корней дисперсионного соотношения можно получить результирующие формулы для скорости распространения продольной волны v и коэффициента затухания δ . Ввиду сложности получения аналитической зависимости скоростей волн и коэффициента затухания решение было получено путем подстановки известных параметров, характеризующие пористую среду и насыщаемых её флюидов. На рисунках 3.2-3.4 представлены трехмерные графики зависимости скорости распространения продольных колебаний от пористости и насыщенности. Данный расчет производился при подстановке известных параметров среды и насыщаемых ее флюидов, в качестве которых являются нефть и вода. Насыщенность S показывает долю воды в общем объеме жидкости. На рис. 3.2 представлен график скорости волны первого рода, соответствующий случаю на рис. 3.1 (а), который характеризуется высокими значениями скорости. Графики на рис. 3.5 и 3.6 показывают зависимости волны второго рода, соответствующие рис. 3.1 (б, в), от насыщенности и пористости.

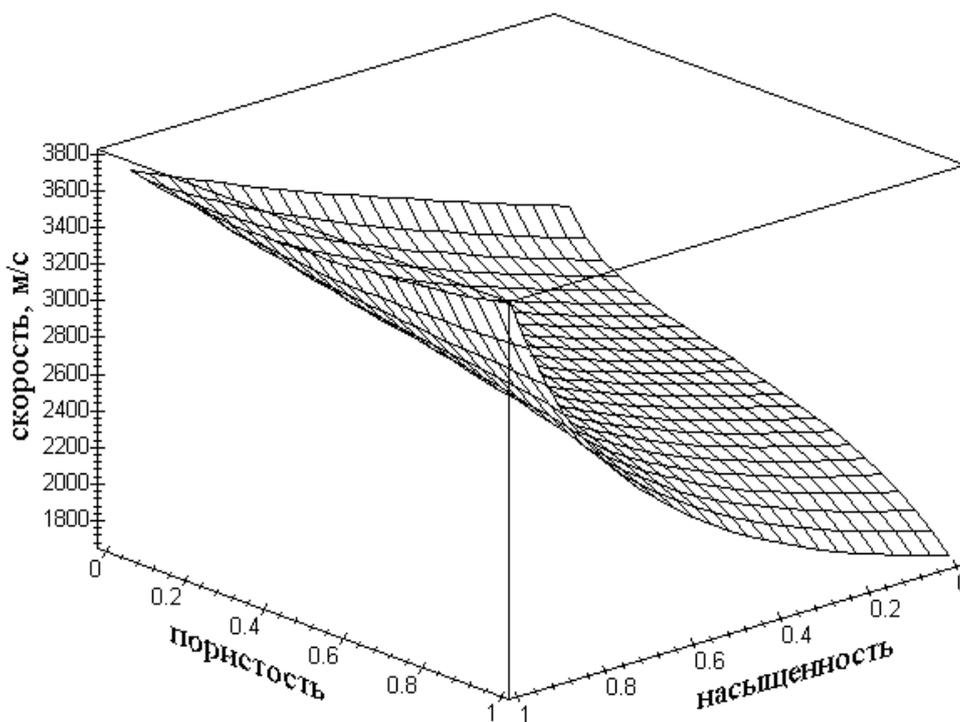


Рис. 3.2.

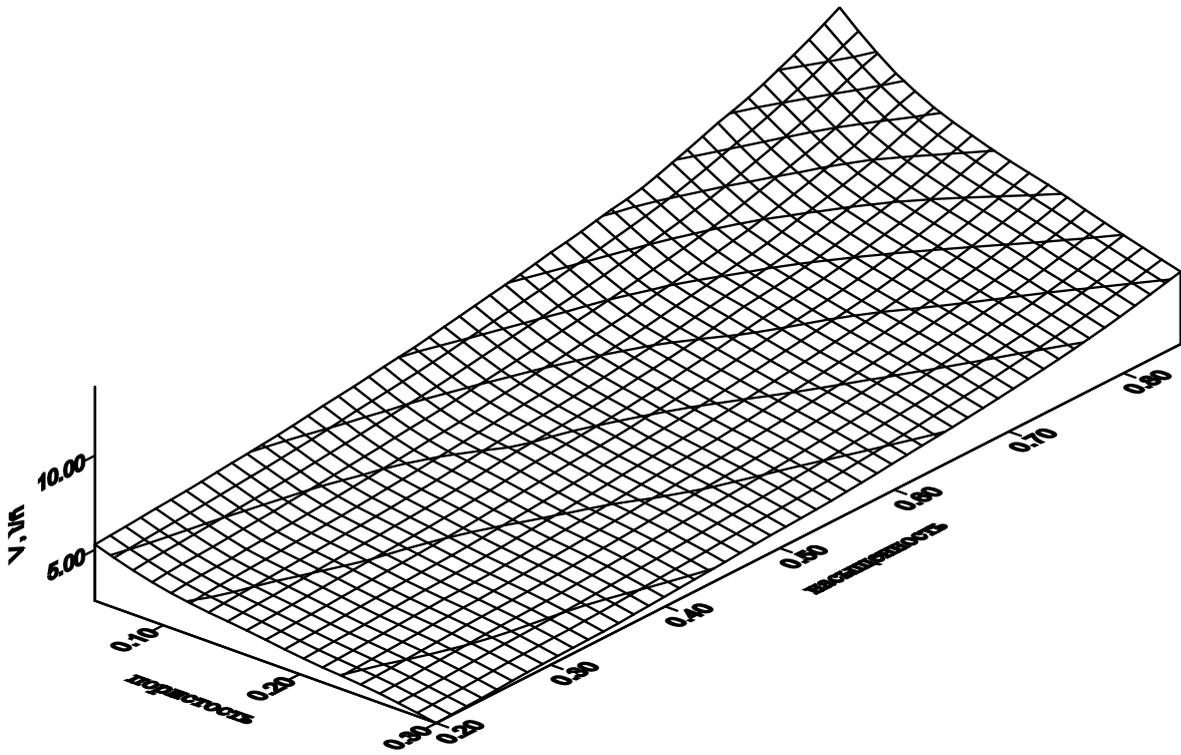


Рис. 3.3.

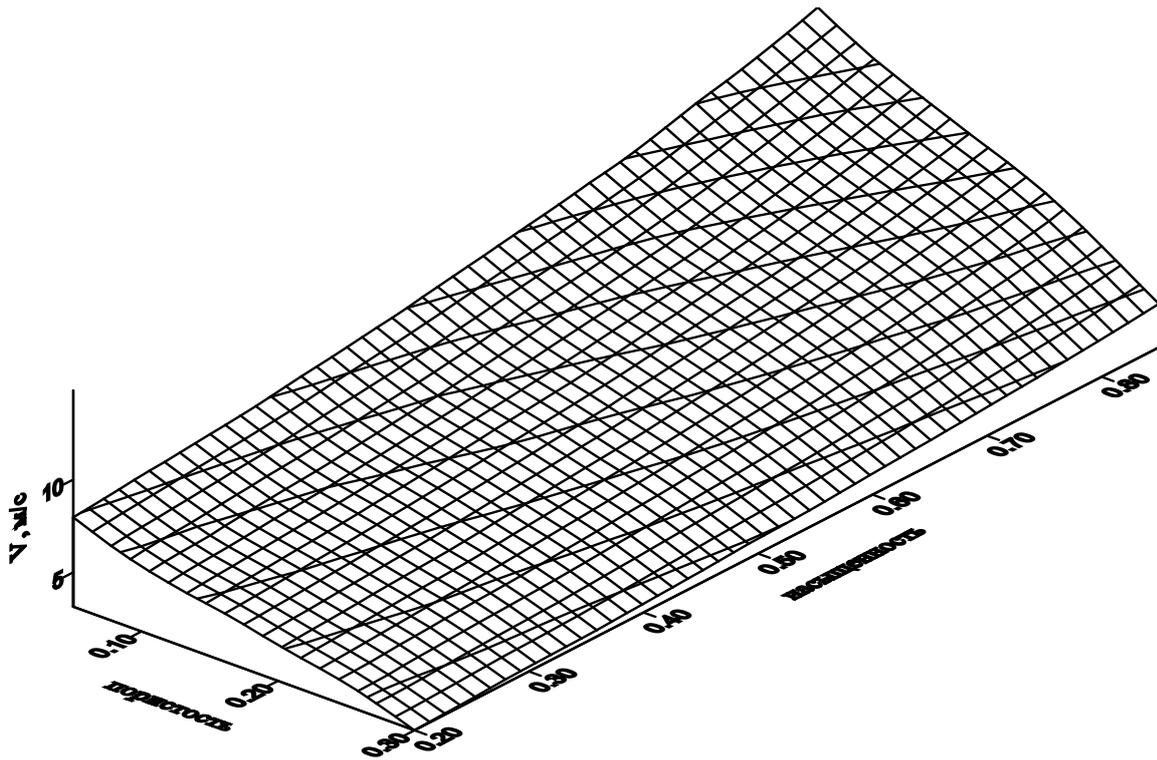


Рис. 3.4.

Для первой волны, которая характеризуется малым затуханием и большой скоростью распространения график зависимости скорости от насыщенности при пористости 20% представлен на рис. 3.5.

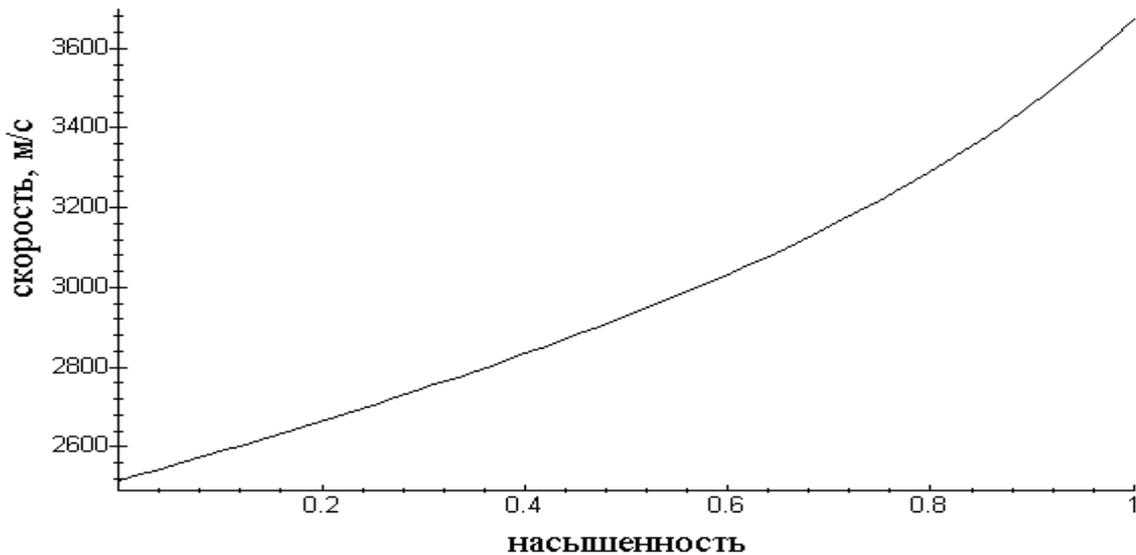


Рис. 3.5.

Зависимость коэффициента затухания δ от пористости и насыщенности представлена графиком на рис. 3.6.

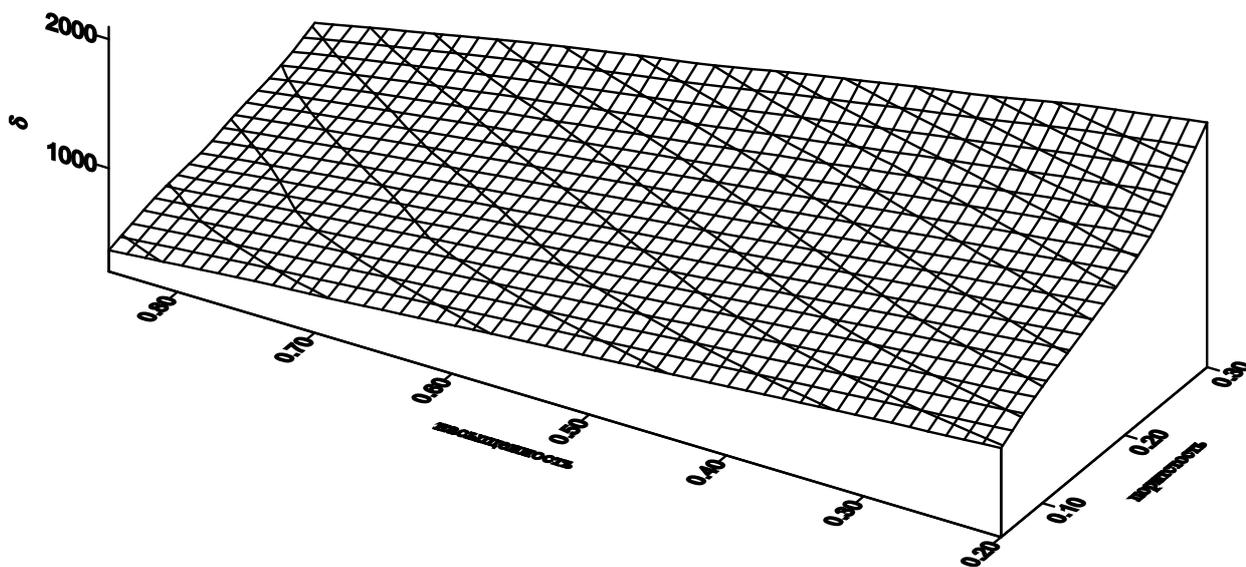


Рис. 3.6.

График на рис. 3.7 показывает зависимость скорости распространения волны первого рода от пористости при доле воды 40%.

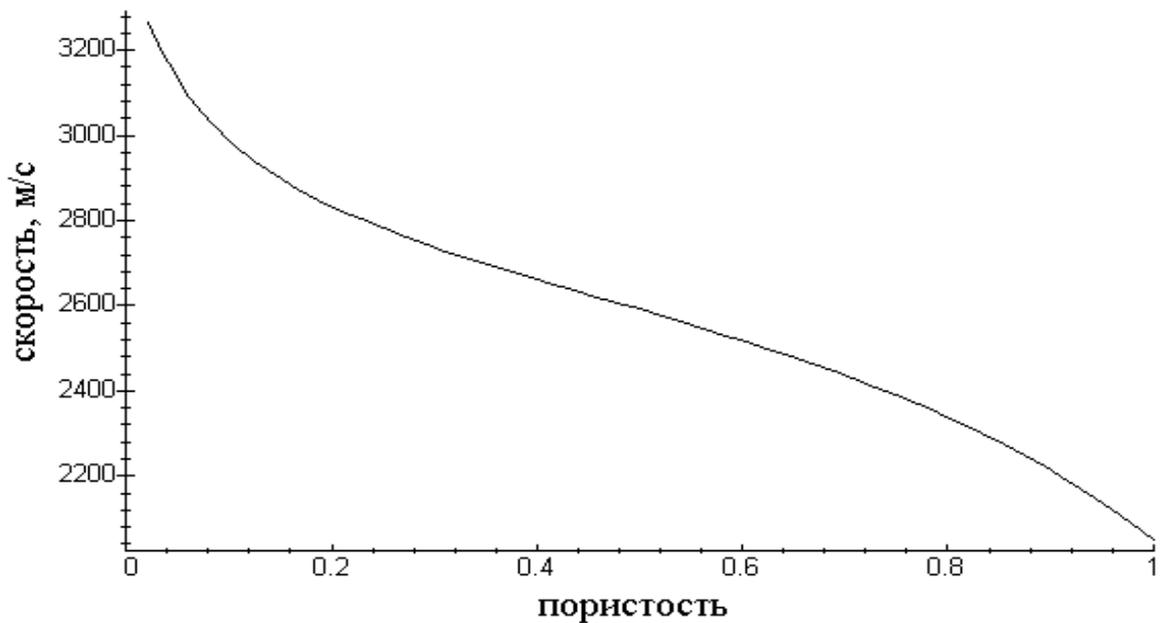


Рис. 3.7.

Полученный результат может иметь большое практическое значение. Так, измерение скоростей распространения и коэффициентов затухания в насыщенных пористых средах различными методами (например, межскважинное прозвучивание, термометрия и т.д.) может дать нам информацию о свойствах среды и насыщаемых ее жидкостях (пористость, обводненность и др.).

Контрольные вопросы

1. Распространение упругих колебаний в сплошных средах.
2. Модель пористой среды Био.
3. Распространение упругих волн в пористых средах.
4. Волны первого рода.
5. Волна второго рода.
6. Инерционная и термическая релаксация упругих волн.
7. Коэффициент поглощения упругих волн в насыщенных пористых средах.
8. Резонансная частота Био.
9. Энергия упругих волн в насыщенных пористых средах.
10. Влияние способа наложения нагрузки на распределения упругой энергии между фазами.
11. Особенности распространения упругих волн в пористой среде, насыщенной двумя жидкостями.
12. Модель пористой среды, используемая в уравнениях Гассмана.
13. Явная формула уравнений Гассмана.
14. Упругие модули «сухого» скелета.
15. Формы представления уравнений Гассмана.

Основная литература

1. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред: в 2 т. Т.1.: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с.
2. *Вуд А.* Звуковые волны и их применения. М.: ЛКИ. 2008. 144 с.
3. *Ковтун А.А.* Об уравнениях модели Био и их модификациях // Ученые записки СПбГУ; №444. СПб., 2011. С.3-26.
4. *Насыров А.М., Овчинников М.Н.* Волновые процессы. Часть 8. Акустические колебания и волны: Учебное пособие для студентов старших курсов и магистрантов радиофизического отделения физического факультета Казанского государственного университета. Казань, 2003. 32 с.
5. *Carcione J.M., Helle H.B., Santos J.E., Ravazzoli C.L.* A constitutive equation and generalized Gassmann modulus for multimineral porous media / Geophysics. 2005. Vol. 70, N 2. P. 17–26.

Дополнительная литература

6. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8, № 4. С.133–150.
7. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid (I. Low frequency range, II. Higher frequency range) // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 168-181.
8. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика пористых насыщенных сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
9. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.:Недра, 1984. 232 с.
10. *Berryman J.G., Milton G.W.* Exact results for generalized Gassmann's equations in composite porous media with two constituents // Geophysics. 1991. V. 56, N 12. P. 1950–1960.
11. *Gassmann F.* Uber Die elastizitat poroser medien // Vier der Natur Gesellschaft. – 1951. N 96. P. 1–23.
12. *Johnson D.L., Hemmick D.L. and Kojima H.* Probing porous media with first and second sound. I. Dynamic permeability // J. Appl. Phys. 1994. V.76, P.104-114.