

# Топология и модели кротовых нор

Аркадий А. Попов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Лобачевские чтения - 2012  
Казань, Россия, 1-6 ноября 2012 года

Мы все привыкли к тому, что прошлого не вернуть, хотя порой очень хочется. Писатели-фантасты уже более века живописуют разного рода казусы, возникающие благодаря возможности путешествовать во времени и пространстве ...

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

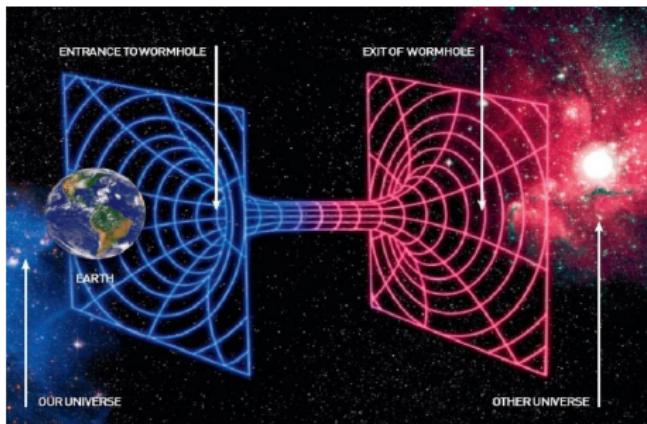
- $G_{\mu\nu}$  – тензор Эйнштейна (описывает геометрию пространства-времени)
- $T_{\mu\nu}$  – тензор энергии-импульса материи.

Согласно эйнштейновской теории тяготения - общей теории относительности четырехмерное пространство-время, в котором мы живем, искривлено, а знакомая всем гравитация и есть проявление такого искривления. Материя «прогибает», искривляет пространство вокруг себя, и - чем она плотнее, тем сильнее искривление.

$$\hbar = c = G = 1$$

# Теория гравитации Эйнштейна

Уже в 1916 году австрийский физик Л. Фламм обсуждал возможность существования пространственной геометрии в виде некой норы, соединяющей два мира.



A. Einstein, N. Rosen, The particle problem in the general theory of relativity, Phys. Rev., 48, 73 (1935);

Нейтральный "мост":

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

где  $u \in (-\infty, +\infty)$ .

Площадь сферы  $u = \text{const}$ :  $A(u) = 4\pi (u^2 + 2M)^2$ .

При  $u = 0$  сфера имеет минимальную площадь  $A(u) = 4\pi (2M)^2$ .

Пределу  $u \rightarrow \pm\infty$  соответствуют асимптотически плоские области.

Замена координат  $r = u^2 + 2M$  [два листа  $r \in [2M, \infty)$ ] приводит к метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - 2M/r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3)$$

мост Эйнштейна  $\leftrightarrow$  Розена кротовая нора Шварцшильда

Кротовые норы – топологические ручки, соединяющие различные вселенные или удаленные области одной вселенной.

Метрика статической сферически симметричной кротовой норы в координатах кривизн:

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4)$$

Диаграмма вложения:

- сечение  $t = \text{const}, \theta = \pi/2$ :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\varphi^2$$

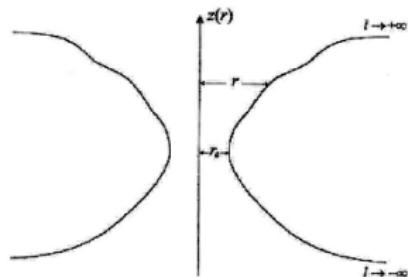
вложим в трехмерное евклидово пространство

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

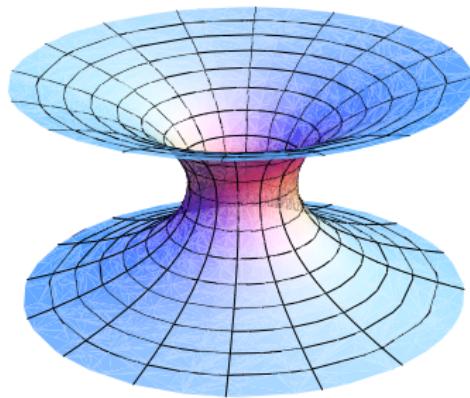
- Условия вложения:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2}.$$

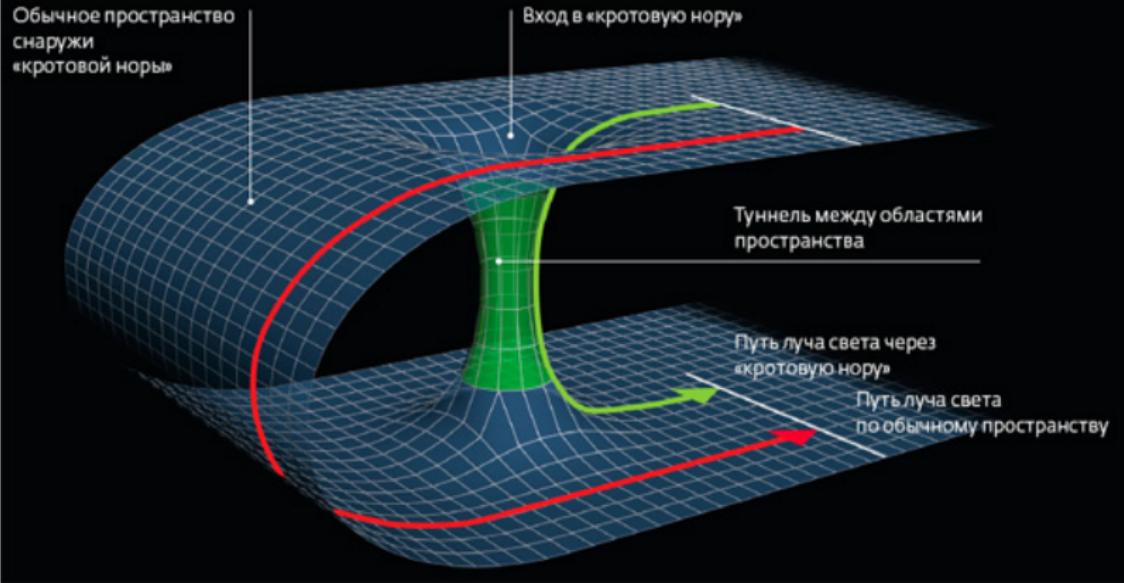
# Кротовые норы



- Диаграмма вложения:

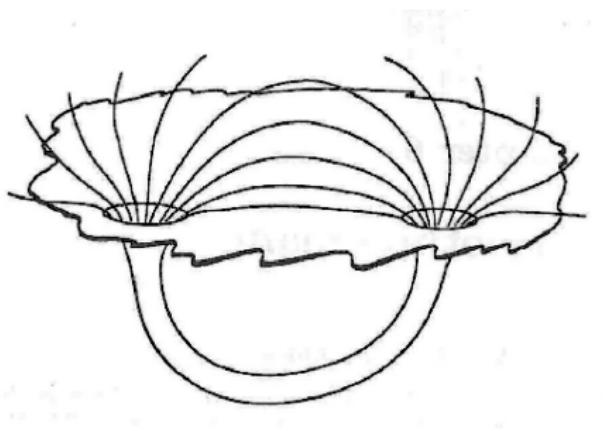


## Двумерная модель «кротовой норы»



# Кротовые норы Уилера

J. A. Wheeler, Geons, Phys.Rev., 97, 511 (1955);  
(Первая диаграмма кротовой норы)



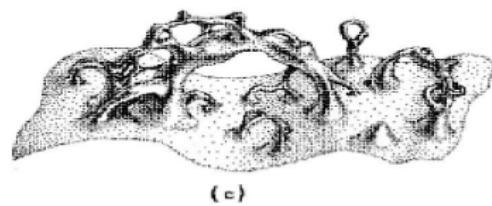
C. W. Misner, J. A. Wheeler, Classical physics as geometry: gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space, Ann. Phys., 2, 525 (1957);

Впервые использован термин "wormhole"  $\leftrightarrow$  "кротовая нора"

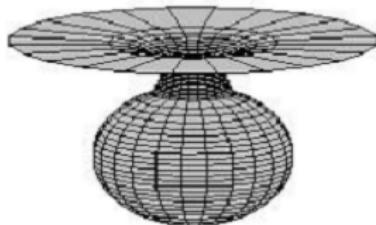
Physics is geometry, mass without mass, charge without charge



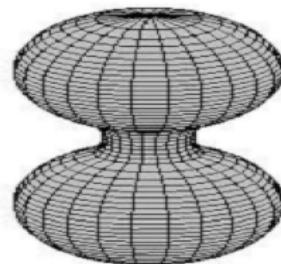
Диаграмма вложения для квантовой  
пространственно-временной пены.



Геометрия пространства - времени на  
планковских масштабах случайна.



Полузамкнутый мир - кротовая нора, соединяющая замкнутую вселенную Фридмана с пространством Минковского



Пространство типа гантели - кротовая нора, соединяющая две замкнутые вселенные Фридмана

1985 год

Знаменитый астроном Карл Саган трудился над романом о межзвездных путешествиях. К тому времени его коллеги по литературному цеху давно отработали эффектный способ отправки своих героев к далеким мирам - прыжки через гипер-, супер- или подпространство (последним термином в молодости обожали пользоваться братья Стругацкие, которые со временем заменили его на нуль-транспортировку). Однако эта идея была чисто литературным приемом, никакого физического обоснования она не имела. Саган не захотел идти проторенным путем и решил ввести в свою книгу **воображаемое транспортное устройство, которое можно было хоть как-то связать с общепринятыми физическими концепциями.**

Для вящей надежности он обратился за помощью к профессору Калифорнийского технологического института Кипу Торну, известному своими работами в области общей теории относительности и космологии.

# Пространство-время статической сферически симметричной кротовой норы

M.S. Morris and K.S. Thorne, Am. J. Phys. 56, 395 (1988).

M.S. Thorne, K.S. Thorne and U. Yurtsever, Phys. Rev. Lett. 61, 1446 (1988).

$$ds^2 = -e^{2f(r)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (5)$$

- $l$  – собственная радиальная координата;
- $f(l)$  – всюду конечна (нет горизонтов событий);
- $r(l)$  – имеет минимум в точке  $l = 0$  ;  
 $A(l) = 4\pi r^2(l)$  – площадь двумерной сферы  $l = \text{const}$ ;  
горловине соответствует сфера минимальной площади  $4\pi r(l=0)$ ;

$$\frac{dr}{dl} \Big|_{l=0} = 0, \quad \frac{d^2r}{dl^2} \Big|_{l=0} > 0 \quad \begin{matrix} \text{– необходимые условия} \\ \text{горловины} \end{matrix}$$

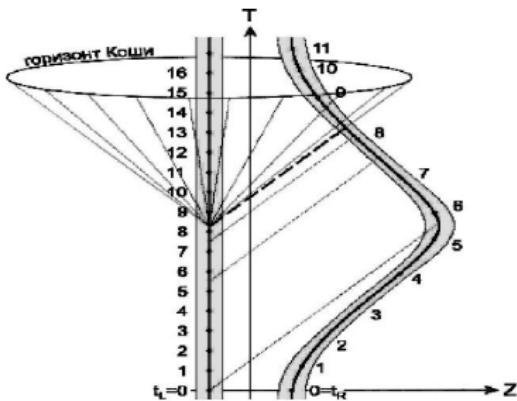
Определение. Будем называть пространство-время  $M$  машиной времени, если  $M$  содержит замкнутые временеподобные мировые линии.

Примеры известных решений уравнений Эйнштейна, описывающих пространства с замкнутыми временеподобными линиями:

- пространство-время бесконечно длинного жестко вращающегося пылевого цилиндра (решение Ван Стокума, 1937);
- вращающаяся вселенная Гёделя (Гёдель, 1949);
- решение Керра (вращающаяся черная дыра);
- вращающиеся космические струны.

## Превращение кротовой норы в машину времени:

В пространстве-времени с проходящей кротовой норой (типа топологической ручки) неизбежно формируются замкнутые временеподобные мировые линии (Мизнер, Торн, Юртсевер, 1988; Фролов, Новиков, 1990; Виссер, 1993).



Диаграмма, иллюстрирующая превращение кротовой норы в машину времени

- Нетривиальные уравнения Эйнштейна  $G^\mu_\nu = 8\pi T^\mu_\nu$

$$2 \frac{r''}{r} + \frac{1 - r'^2}{r^2} = 8\pi \rho,$$

$$2 \frac{f' r'}{r} + \frac{1 - r'^2}{r^2} = 8\pi p_r,$$

$$f'' + f'^2 + \frac{f' r' + r''}{r} = 8\pi p_\perp,$$

$\rho$  – плотность энергии материи,  $p_r$  – радиальное давление материи,  $p_\perp$  – поперечное давление материи.

- В горловине  $l = 0$

$$(\rho + p_r)_{l=0} = - \frac{r''}{4\pi r|_{l=0}} < 0 \quad (6)$$

- Это условие показывает, что в горловине проходимой кротовой норы нарушается изотропное энергетическое условие.
- Материя, для которого нарушаются изотропное энергетическое условие, называется экзотическим.

- Световое энергетическое условие:

$$T_{\mu\nu}K^\mu K^\nu \geq 0, \quad (7)$$

где  $K^\mu$  - произвольный изотропный вектор.

Если  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$ , то из условия (11) следует

$$\rho + p_i \geq 0. \quad (8)$$

- Слабое энергетическое условие:

$$T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0, \quad (9)$$

где  $U^\mu$  - произвольный времениподобный вектор.

В терминах главных давлений  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$  условие (13) гласит

$$\rho \geq 0, \quad (10)$$

т.е. плотность энергии **неотрицательна**.

- Сильное энергетическое условие:

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (11)$$

или

$$\rho + \sum_i p_i \geq 0. \quad (12)$$

- Условие энергодоминантности предполагает, что

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0. \quad (13)$$

и вектор  $T_{\mu\nu} u^\mu$  является времениподобным либо изотропным.

Физическое содержание этого требования состоит в том, что скорость переноса энергии не должна превосходить скорости света.

Условия энергодоминантности лежат в основе доказательства многих важных теорем и фактов общей теории относительности. Среди них теоремы Пенроуза и Хокинга о сингулярностях, теорема о топологической цензуре, термодинамические свойства горизонта событий и др.

## Классические скалярные поля:

- действие

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{8\pi} - (\nabla\phi)^2 - \xi R\phi^2 - 2V(\phi) \right\}; \quad (14)$$

- тензор энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 - g_{\mu\nu} V(\phi) \\ & + \xi \left[ G_{\mu\nu} \phi^2 - 2\nabla_\mu (\phi \nabla_\nu \phi) + 2g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\phi \nabla_\lambda \phi) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

- изотропное энергетическое условие:

$$8\pi T_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = G_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = \frac{8\pi}{1 - 8\pi\xi\phi^2} \left[ \phi'^2 - \xi(\phi^2)'' \right] \geq 0 \quad (16)$$

может нарушаться в ряде случаев.

Явные решения, описывающие кротовые норы, были получены Бронниковым (1973), Барчело и Виссером (1999, 2000), Сушкиным и Кимом (2002).

## Космологические наблюдения

- ускоренное расширение Вселенной свидетельствует о том, что Вселенная заполнена в основном "темной энергией материи с экзотическим уравнением состояния.

## Альтернативные теории гравитации

- скалярно-тензорные теории Бранса-Дикке и Бергмана-Вагонера:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} \};$$

- гравитационные теории с кручением;
- несимметричные ( $g_{\mu\nu} \neq g_{\nu\mu}$ ) гравитационные теории;
- гравитационные теории с высшими производными;
- кротовые норы на 4-х мерной "бране" в пространстве-времени размерности больше, чем 4.

## Квантовые эффекты

- эффект Казимира:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar}{a^4} \text{diag}(-1, 1, 1, -3), \quad (17)$$

$\rho = -\frac{\pi^2 \hbar}{720 a^4} < 0$  – плотность энергии отрицательна!

- $\rho + p_z = -\frac{\pi^2 \hbar}{180 a^4} < 0$  – изотропное энергетическое условие нарушено!
- сжатые состояния в квантовой электродинамике;
- теоретические указания [Блау, Виссер, Випф (1988)]

## Полуклассическая теория гравитации

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}, \quad (18)$$

$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  – вакуумные средние оператора тензора энергии-импульса квантованных материальных полей.

$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  определяется геометрическими и топологическими свойствами пространства-времени, а также выбором квантового состояния, в котором  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  вычисляются.

Morris M. and Thorne K. (Am. J. Phys., 1988)

$$\hbar = c = G = 1$$

$$\langle T_\mu^\nu \rangle_{ren} \sim \delta_\mu^\nu \langle T_k^k \rangle_{ren}, \quad (19)$$

$\langle T_k^k \rangle_{ren}$  определяется конформной аномалией  
для безмассовых конформно инвариантных полей

Starobinsky A. (Phys. Lett. B, 1980 )

Mamayev S. and Mostepanenko V. (Sov. Phys.-JETP, 1980 )

Kofman L., Sahni V. and Starobinsky A. (Sov. Phys.-JETP, 1983)

Kofman L. and Sahni V. (Phys. Lett. B, 1983)

Kofman L. and Sahni V. (Phys. Lett. A, 1986 )

Spindel P. (Phys. Rev. D, 1988)

## Приближенные методы вычисления $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ для безмассовых конформно инвариантных полей.

Page (Phys. Rev. D, 1982)

Brown, Ottewill ( Phys. Rev. D, 1985)

Brown, Ottewill and Page (Phys. Rev. D, 1986)

Frolov, Zel'nikov (Phys. Rev. D, 1987)

Anderson, Hiscock, Samuel (Phys. Rev. D, 1995)

Groves, Anderson and Carlson (Phys. Rev. D, 2002)

Sushkov (Phys. Lett. A, 1992)

Hochberg, Popov, and Sushkov (Phys. Rev. Lett. 1997)

– численное решение, описывающее кротовую нору в рамках полуklassической теории гравитации

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}. \quad (20)$$

Проблема такого подхода – отсутствие пределов применимости приближения для  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ .

$$\frac{1}{ml} \ll 1, \quad (21)$$

$m$  – масса квантованного поля,

$l$  – характерный масштаб радиуса кривизны пространства-времени.

приближение Девитта-Швингера:

$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}(x)$  определяется  $g_{\mu\nu}(x)$  в окрестности  $x$  и не зависит от выбора квантового состояния.

Anderson, Hiscock, Samuel (Phys. Rev. D, 1995)

Matyjasek (Phys. Rev. D, 1999)

Matyjasek (Phys. Rev. D, 2000)

Popov (Phys. Rev. D, 2001)

Popov A. (Phys. Rev. D, 2001)

$$ds^2 = -f(\rho)dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle T_t^t \rangle_{ren} &= \langle T_\rho^\rho \rangle_{ren} = \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left\{ \frac{m^2 r^2}{8} \left( \xi - \frac{1}{8} \right) + \frac{79}{7680} - \frac{11}{96} \xi + \frac{3}{8} \xi^2 \right. \\ &+ \left[ -\frac{m^4 r^4}{8} + \frac{m^2 r^2}{2} \left( \frac{1}{6} - \xi \right) - \frac{1}{60} + \frac{1}{6} \xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right] \ln \sqrt{\frac{\mu^2}{m_{DS}^2 r^2}} \\ &+ \left. \left[ \frac{m^4 r^4}{2} + 2m^2 r^2 \left( \xi - \frac{1}{8} \right) + 2 \left( \xi - \frac{1}{8} \right)^2 \right] [I_1(\mu) - I_2(\mu)] \right\} \\ &+ O\left(\frac{\varepsilon_{WKB}^2}{r^4}\right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\langle T_\theta^\theta \rangle_{ren} = \langle T_\varphi^\varphi \rangle_{ren} = \dots, \quad (24)$$

$$\mu^2 = m^2 r^2 + 2(\xi - 1/8), \quad (25)$$

$$I_1(\mu) = \int_0^\infty \frac{x \ln |1 - x^2|}{1 + e^{2\pi|\mu|x}} dx, \quad I_2(\mu) = \int_0^\infty \frac{x^3 \ln |1 - x^2|}{1 + e^{2\pi|\mu|x}} dx, \quad (26)$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \left[ \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}(m=0, \xi=1/6) + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}(m, \xi) + \left( T^{ef} \right)_{\mu\nu} \right] \quad (27)$$

$$\left( T^{ef} \right)_{\nu}^{\mu} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \text{ diag}(-1, -1, 1, 1). \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi r^2} &\simeq \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[ 0.00310 + \frac{1}{720} \ln(m_{\text{DS}}^2 r^2) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{m^2 r^2} \left( -\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{12} - \frac{\xi}{60} + \frac{1}{630} \right) \right] - \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 0 &\simeq \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[ -0.00171 - \frac{1}{720} \ln(m_{\text{DS}}^2 r^2) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{m^2 r^2} \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right) \right] + \frac{Q^2}{8\pi r^4}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$r^2 \simeq \sqrt{-\frac{1}{\pi m^2} \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right)} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Q^2 \simeq \frac{2}{\pi} \left[ 0.00171 + \frac{1}{720} \ln \left( \frac{m_{\text{DS}}^2}{m\sqrt{\pi}} \sqrt{-\left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right)} \right) \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{m} \sqrt{-\left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi}{30} - \frac{1}{315} \right)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

Подчеркнем, что тензор энергии импульса, рассматриваемый здесь, обладает необходимыми "экзотическими" свойствами для того чтобы обеспечивать существование кротовой норы:

$$\begin{aligned} p_r = -\epsilon = \frac{1}{4\pi^2 r^4} \left[ 0.00310 + \frac{1}{720} \ln(m_{\text{DS}}^2 r^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{m^2 r^2} \left( -\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{12} - \frac{\xi}{60} + \frac{1}{630} \right) \right] - \frac{Q^2}{8\pi r^4} < 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $p_r$  – радиальное давление,  $\epsilon$  – плотность энергии.

A. Popov (Class. Quantum Grav., 2005)

Спасибо за внимание