КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт экологии и природопользования,
кафедра моделирования экологических систем

Основные правила и формулы математики

Никоненкова Т.В., Зарипов Ш.Х., Скворцов Э.В.,
Шарафутдинов В.Ф.

Учебное пособие

Издательство
Казанского федерального университета
2015

УДК 51-7

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУ ВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" и учебно-методической комиссии Института экологии и природопользования Протокол № 5 от 13 мая 2015 г. заседания кафедры моделирования экологических систем Протокол № 9 от 15 апреля 2015 г.

Авторы-составители
к.ф.-м.н. Никоненкова Т.В., д.ф.-м.н. Зарипов Ш.Х.,
д.ф.-м.н. Скворцов Э.В., д.ф.-м.н. Шарафутдинов В.Ф.

Рецензенты д.ф.-м.н. Широкова Е.А., д.ф.-м.н. Абзалилов Д.Ф.

Основные правила и формулы математики: учебное пособие / Т.В. Никоненкова, Ш.Х. Зарипов, Э.В. Скворцов, В.Ф. Шарафутдинов. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета, 2015. – 66 с.

Учебное пособие предназначено для студентов 1 и 2 курса Института Экологии и Природопользования, обучающихся по направлению "Экология и природопользование"и "Землеустройство и кадастр". Пособие содержит минимальный объем знаний, который должен знать студент, прослушавший курс *Математики*, а также варианты контрольных работ.

Содержание

1. Аналитическая геометрия на плоскости

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{1}$$

Деление отрезка в данном отношении

Координаты точки $C(x; y)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = AC/CB$ (считая от A к B), определяются формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \tag{2}$$

Если точка C делит отрезок AB пополам, то $AC = CB$ и, следовательно, $\lambda = 1$. Тогда

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \tag{3}$$

Площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$

$$\boxed{S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}} \tag{4}$$

Преобразование системы координат

Под *параллельным переносом* осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O'x'y'$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

Пусть начало новой системы координат точка O' имеет координаты $(a; b)$ в старой системе координат Oxy, т. е. $O'(a; b)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O'x'y'$ через $(x'; y')$, тогда

$$\boxed{x' = x - a, \quad y' = y - b} \tag{5}$$

Обратно,

$$\boxed{x = x' + a, \quad y = y' + b} \tag{6}$$

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $Ox'y'$ получена поворотом системы Oxy на угол $\alpha = \angle x'Ox$, причем $\alpha > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки. Тогда формулы поворота осей могут быть записаны в виде

$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}} \tag{7}$$

Полученные формулы позволяют определять старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки M, и наоборот:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}} \tag{8}$$

Параллельный перенос и поворот системы координат

Новая система координат $O'x'y'$ получена из старой Oxy путем параллельного переноса осей координат в новое начало $O'(a; b)$ и последующим поворотом осей на угол α

$$\boxed{\begin{cases} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}} \tag{9}$$

$$\boxed{\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}} \tag{10}$$

Связь между полярными и прямоугольными координатами

$$\boxed{\begin{matrix} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi, \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{matrix}} \tag{11}$$

где x и y - прямоугольные координаты точки M, а r и φ - ее полярные координаты.

Параметрическое уравнение линии

Координаты точки $M(x; y)$ рассматриваются как функции некоторого параметра t:

$$\boxed{\begin{matrix} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{matrix}} \tag{12}$$

При изменении t величины x и y будут меняться, следовательно, точка будет перемещаться. Роль параметра может играть время, угол между осью Ox и радиус-вектором точки $M(x;y)$, длина дуги, отсчитываемая от фиксированной точки линии и т. п.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\boxed{y = kx + b} \tag{13}$$

Число $k = \mathrm{tg}\alpha$ называется **угловым коэффициентом** прямой, b - величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Oy.

Если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y = kx$.

Общее уравнение прямой

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \tag{14}$$

где A, B, C- произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \tag{15}$$

Это уравнение с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{16}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy - в точке $M_2(0; b)$. В этом случае уравнение прямой примет вид

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \tag{17}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$. Тангенс угла между этими прямыми определяется формулой:

$$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}} \tag{18}$$

- Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то

$$\boxed{k_1 = k_2} \tag{19}$$

- Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}} \tag{20}$$

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, где $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, тогда тангенс угла между прямыми вычисляется по формуле

$$\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|} \tag{21}$$

условие их параллельности имеет вид

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}} \tag{22}$$

условие их перпендикулярности:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \tag{23}$$

- Для нахождения общих точек прямых L_1 и L_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \tag{24}$$

Расстояние от точки $M(x_1;y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}} \tag{25}$$

Линии второго порядка на плоскости

Кривые второго порядка определяются уравнением

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{26}$$

Уравнение окружности:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,} \tag{27}$$

где $(x_0;y_0)$ - центр окружности, а R - ее радиус.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{28}$$

Точки пересечения кривой (28) с осями координат Ox и Oy есть точки $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $B(0;b)$, $B'(0;-b)$. Эти точки называются *вершинами эллипса.* Число $2a=A'A$ называется *большой осью* эллипса, а $2b=B'B$ - *малой осью* эллипса.

Фокусы эллипса имеют следующие координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где

$$\boxed{c^2=a^2-b^2}$$

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ (так как $c<a$, то $\varepsilon<1$).

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,} \tag{29}$$

где a - действительная полуось, b - мнимая полуось.

Фокусы гиперболы имеют следующие координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

Гипербола имеет две асимптоты:

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x}$$

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называют *эксцентриситетом* гиперболы.

Каноническое уравнение параболы:

$$\boxed{y^2 = \pm 2px,} \tag{30}$$

где $p > 0$ - параметр параболы. Ветви этой параболы направлены вправо(+) либо влево(-). Точки $F\left(\pm\dfrac{p}{2}; 0\right)$ - соответственно фокусы параболы (30), прямые $x = \mp\dfrac{p}{2}$ - директрисы параболы.

Если

$$\boxed{x^2 = \pm 2py,} \tag{31}$$

то ветви этой параболы направлены вверх(+) либо вниз(-). Фокусы находится соответственно в точках $F(0; \pm\dfrac{p}{2})$, а директрисами параболы являются прямые $y = \mp\dfrac{p}{2}$.

2. Математический анализ

2.1. Предел

Предел функции

Функция $f(x)$ имеет предел A в точке x_0, если значение $f(x)$ можно сделать сколь угодно близким к A, когда x достаточно близко к x_0

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = A} \tag{32}$$

Основные пределы:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{c}{x} = \pm\infty, \quad c > 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \sin x \text{ не существует}}$$

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \tag{33}$$

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}=2,71828...} \tag{34}$$

Если в равенстве (34) положить $\dfrac{1}{x}=\alpha$ ($\alpha\to 0$, при $x\to\infty$) будем иметь

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}} \tag{35}$$

Основные виды неопределенностей

Виды неопределенности	Метод нахождения пределов
$\left[\dfrac{0}{0}\right]$	• Преобразовать и упростить • Первый замечательный предел • Правило Лопиталя
$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	• Преобразовать и упростить • Правило Лопиталя
$[0\cdot\infty]$ или $[\infty-\infty]$	• Преобразовать к $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, затем использовать правило Лопиталя
$[1^\infty]$	• Второй замечательный предел
$\left[0^0\right]$ или $[\infty^\infty]$	• Прологарифмировать и использовать равенство $\lim_{x\to x_0}\ln(f(x))=\ln(\lim_{x\to x_0}(f(x)))$

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя представляет собой метод вычисления пределов, имеющих неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пусть a - некоторое конечное действительное число или равно бесконечности.

- Если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, то $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$
- Если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

2.2. Производная функции

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется формулой

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \tag{36}$$

Правила дифференцирования

1. $(C \cdot u)' = C \cdot u', \quad C = const$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - правило дифференцирования суммы(разности)
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - правило дифференцирования произведения
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ - правило дифференцирования частного
5. $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ - дифференцирование сложной функции

Таблица производных

$C' = 0$	$x' = 1$
$(x^2)' = 2x$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
$(a^x)' = a^x \mathrm{ln} a$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная функции, заданной параметрически

Если функция задана в параметрической форме $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то

$$\boxed{y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}} \tag{37}$$

Геометрический смысл производной

Производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

Уравнение касательной к плоской кривой при $x = x_0$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \tag{38}$$

Уравнение нормали к плоской кривой при $x = x_0$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \tag{39}$$

Алгоритм исследования функции

1) Нахождение области определения функции.

2) Исследование функции на четность или нечетность и периодичность.

Функция является *четной*, если $y(-x) = y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.

Функция является *нечетной*, если $y(-x) = y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат.

Если же ни одно из равенств не выполняется, то перед нами функция общего вида.

3) Нахождение точек разрыва и участков непрерывности.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел слева равен пределу справа и совпадает со значением функции в точке x_0, то есть $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

В точке x_0 функция имеет *неустранимый разрыв первого рода*, если пределы слева и справа существуют и конечны, но не равны, то есть $\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x)$. Точку x_0 в этом случае называют *точкой скачка функции.*

В точке x_0 функция имеет *разрыв второго рода*, если либо предел слева $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$, либо предел справа $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$, не существует или бесконечен.

4) Нахождение точек пересечения с осями координат.

5) Нахождение интервалов знакопостоянства функции, т.е. где $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$.

6) Нахождение асимптот (вертикальных, горизонтальных, наклонных).

Прямая $x = x_0$ - *вертикальная* асимптота, если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 бесконечны.

Горизонтальные или наклонные асимптоты следует искать лишь тогда, когда функция определена на бесконечности.

Наклонные асимптоты ищутся в виде прямых $y = kx + b$, где $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.

Если $k = 0$ и $b \neq \infty$, то наклонная асимптота станет *горизонтальной.*

7) Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, точек экстремума.

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции

- находим производную;
- находим критические точки (внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует);
- разбиваем область определения критическими точками на интервалы;
- определяем знак производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку возрастания ($f'(x) > 0$), знак «минус» - промежутку убывания ($f'(x) < 0$).

Точками экстремума функции являются точки, в которых функция определена, а ее производная, проходя через эти точки, меняет знак.

Если производная меняет знак с плюса на минус при прохождении через точку x_0, то это *точка локального максимума.*

Если производная меняет знак с минуса на плюс, то это *точка локального минимума.*

8) Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.

Чтобы определить промежутки вогнутости (выпуклости вниз) и выпуклости (выпуклости вверх) функции

- находим вторую производную;

- находим нули числителя и знаменателя второй производной;
- разбиваем область определения полученными точками на интервалы;
- определяем знак второй производной на каждом из промежутков. Знак «плюс» будет соответствовать промежутку вогнутости, знак «минус» - промежутку выпуклости.

Точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* , если в данной точке существует касательная к графику функции, и вторая производная функции меняет знак при прохождении через x_0.

2.3. Дифференциал функции

Дифференциал функции $y = f(x)$

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x} \tag{40}$$

Отсюда получаем, что

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)} \tag{41}$$

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

Свойства дифференциалов

1. $\mathrm{d}(C \cdot u) = C \cdot \mathrm{d}u, \quad C = const$
2. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}(u \cdot v) = u \cdot \mathrm{d}v + v \cdot \mathrm{d}v$
4. $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \mathrm{d}u - u \cdot \mathrm{d}v}{v^2}$
5. $\mathrm{d}f(u) = f'(u)\mathrm{d}u$

Таблица дифференциалов

$\mathrm{d}(C) = 0$	$\mathrm{d}(x + C) = \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\alpha \cdot x + C) = \alpha \cdot \mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(x^p) = p \cdot x^{p-1} \cdot \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot \mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\log_a x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$	$\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x \mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}(\mathrm{tg} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$	$\mathrm{d}(\mathrm{ctg} x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$
$\mathrm{d}(\arcsin x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\mathrm{d}(\arccos x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\mathrm{d}(\mathrm{arctg} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$	$\mathrm{d}(\mathrm{arcctg} x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$

2.4. Неопределенный интеграл

Определение первообразной

Первообразной функции $f(x)$ на промежутке $(a; b)$ называется такая функция $F(x)$, что выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ для любого x из заданного промежутка.

Определение неопределенного интеграла

Все множество первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C} \tag{42}$$

Отыскание неопределенного интеграла называют *интегрированием* функции.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

2. $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$

3. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$

4. $\int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x, \quad k = const$

5. $\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

Таблица интегралов

$\int x^p\mathrm{d}x = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C\ (p \neq 1)$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\|x\| + C$
$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1)$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C\ (a \neq 0)$
$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\| + C$	$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + C$
$\int \dfrac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln\|x-a\| + C$	$\int \dfrac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = \dfrac{A}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C$

Замена переменных в неопределенном интеграле

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x\ |_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t} \tag{43}$$

Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u} \tag{44}$$

или

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x} \tag{45}$$

Применение этой формулы целесообразно в тех случаях, когда интеграл справа либо проще интеграла слева, либо ему подобен.

Некоторые интегралы, которые удобно вычислять по частям:

1)для интегралов вида $\int P(x)\sin kx\mathrm{d}x$, $\int P(x)\cos kx\mathrm{d}x$, $\int P(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$ за u следует принять многочлен $P(x)$, а все остальное за $\mathrm{d}v$

2)для интегралов вида $\int P(x)\arcsin x\mathrm{d}x$, $\int P(x)\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$, $\int P(x)\ln x\mathrm{d}x$ за u принимают соответственно $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}x$, $\ln x$, а $P(x)\mathrm{d}x$ за $\mathrm{d}v$

Примечание. *Многочленом* степени n называют выражение

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

где a_0, a_1,...,a_n - коэффициенты многочлена.

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называют дробь вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональную дробь называют *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называется *неправильной*.

Перед интегрированием $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ нужно выполнить следующие действия:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь

2) разложить знаменатель дроби на множители

$$Q(x) = (x-a)^m \cdot ... \cdot (x^2 + px + q)^n \cdot ...,$$

где $x^2 + px + q$ - неразложимый множитель

3) правильную рациональную дробь представить как сумму простейших дробей:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_m}{(x-a)^m} + ...$$

$$... + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + ... + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + ...$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты A_i $(i = \overline{1, m})$, B_j, C_j $(j = \overline{1, n})$ для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов

Интегрирование тригонометрических функций

Универсальной тригонометрической подстановкой является следующая:

$$\boxed{\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t} \tag{46}$$

В результате этой подстановки имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\mathrm{arctg}t}$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$

Случай 1. Один из показателей m или n - нечетное положительное число.
а) если m - нечетное, то применяем замену $\cos x = t$
б) если n - нечетное, то применяем замену $\sin x = t$

Случай 2. И m и n - четные положительные числа. Тогда используем формулы понижения порядка:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{array}}$$

Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$, $\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$, $\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$

Такие интегралы находят с помощью формул:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)), \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)), \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \end{array}}$$

2.5. Определенный интеграл

Принято следующее обозначение определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

где числа a и b называются нижним и верхним пределом интегрирования соответственно.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$
4. $\int_a^b (kf(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad k = const$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),} \tag{47}$$

где $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$

Интегрирование по частям

$$\boxed{\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u} \tag{48}$$

Формула замены переменных

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t,} \tag{49}$$

где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Вычисление длин дуг

1) Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x}$$

2) Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$:

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t}$$

Формулы вычисления площадей плоских фигур

Геометрический смысл определенного интеграла $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ - это площадь криволинейной трапеции.

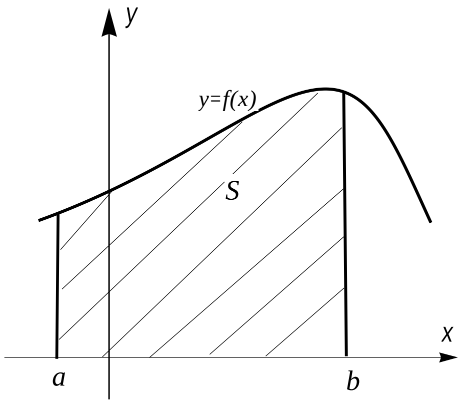

Рис. 1. $\boxed{S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$

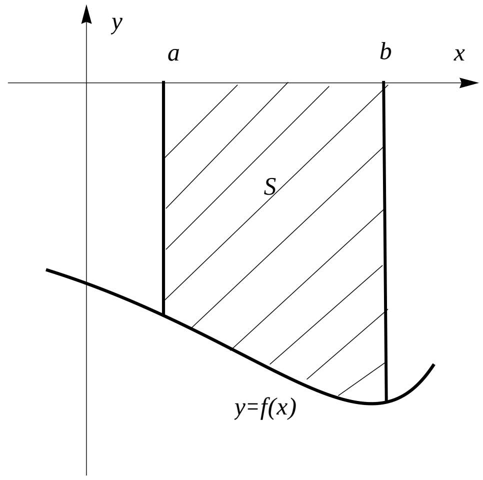

Рис. 2. $\boxed{S = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$

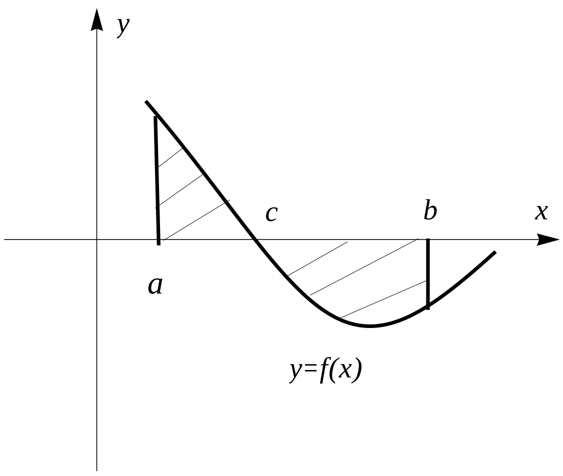

Рис. 3. $\boxed{S = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x}$

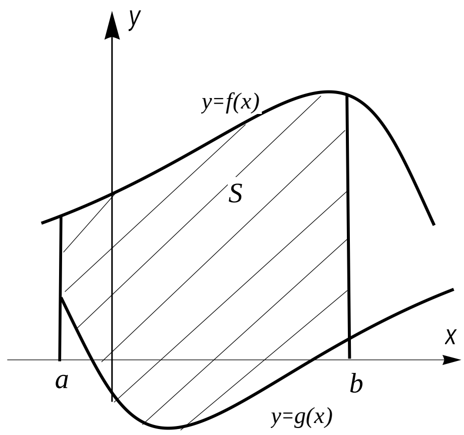

Рис. 4. $\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x}$

Вычисление объема тела вращения

Ели криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x}$$

Вычисление площади поверхности вращения

Ели дуга гладкой кривой $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x}$$

3. Алгебра

3.1. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$$

1) две матрицы равны, если равны все соответствующие элементы этих матриц

2) матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называют *квадратной* $A_{n\times n}$

3) квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы нули, называется *единичной* матрицей:

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

4) матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором (или вектор-столбцом, или вектор-строкой)

5) матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к данной (A^T)

Сложение двух матриц

Эта операция определена для матриц одинаковой размерности

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}+b_{11}} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

$$k \cdot A_{m\times n} = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & \dots & k\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & \dots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведение матриц

Операция умножения двух матриц A и B определена только для случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} \\ \boxed{b_{31}} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

3.2. Определители

Каждой квадратной матрице $A_{n\times n}$ можно сопоставить число $\det A$, которое называется определителем матрицы.

1) $n = 1$. $\det A = a_{11}$

2) $n = 2$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2) $n = 3$.

Первый способ. Определитель считается разложением по любому столбцу (строке). Например,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

<u>*Второй способ.*</u> (способ Саррюса или способ «параллельных полосок»)

Суть состоит в том, что справа от определителя приписывают первый и второй столбец и проводят линии:

$a_{11}@-[dr]a_{12}@-[dr]a_{13}@-[dr]@--[dl]a_{11}@--[dl]a_{12}@--[dl]a_{21}a_{22}@-[dr]@--[dl]a_{23}@$

Множители, находящиеся на «сплошных» диагоналях входят в формулу со знаком плюс, а множители, находящиеся на «пунктирных» диагоналях входят в формулу со знаком минус, т.е.

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Свойства определителей

1) при перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак

2) определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю

3) общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя

4) если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю

5) определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + k \cdot a_{11} & a_{32} + k \cdot a_{12} & a_{33} + k \cdot a_{13} \end{vmatrix}$$

Обратная матрица

Пусть A -квадратная матрица n-ого порядка. Матрица A^{-1} называется обратной матрицей к матрице A, если выполнено условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Всякая матрица A, у которой $\det A \neq 0$, имеет обратную матрицу.

<u>$n = 2$</u>

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$\underline{n=3}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3.3. Системы линейных уравнений

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{50}$$

Эта система может быть записана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{51}$$

или

$$A \cdot X = B$$

где A - основная матрица системы, B - столбец свободных членов, X - столбец неизвестных.

Матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной* матрицей.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Если выполнены условия:

1) A - квадратная матрица ($m = n$)

2) $\det A \neq 0$

то решение системы (50) единственно и находится по *формулам Крамера*:

$$\boxed{x_k = \frac{D_k}{\det A}, \quad k = \overline{1, n},}$$

где D_k - определитель, получающийся из $\det A$ заменой k-ого столбца на столбец свободных членов B.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса – универсальный инструмент для нахождения решения системы линейных уравнений.

Метод Гаусса - метод последовательного исключения неизвестных (приведение к ступенчатому виду).

Дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3 \end{cases}$$

Основная цель метода - привести расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | \, a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | \, a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | \, a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | \, a_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & | \, b_2 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & | \, b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | \, a_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & | \, b_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & | \, c_3 \end{pmatrix}$$

В результате возможны следующие случаи:

1) $c_{33} = 0$, а $c_3 \neq 0$, тогда система не имеет решений

2) $c_{33} = c_3 = 0$, тогда система имеет бесконечно много решений

1) $c_{33} \neq 0$, тогда система имеет единственное решение

Из преобразованной системы последовательно определяют все неизвестные.

4. Элементы векторной алгебры

4.1. Прямоугольные координаты в пространстве

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точку M пространства, имеющую координаты x (абсцисса), y (ордината), z (аппликата), обозначают $M(x; y; z)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{52}$$

Деление отрезка в данном отношении

Координаты точки $C(x; y; z)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = AC/CB$ (считая от A к B), определяются формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}} \tag{53}$$

В частности, координаты середины отрезка AB определяются по формулам

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}} \tag{54}$$

4.2. Векторы и простейшие действия над ними

Вектор - направленный прямолинейный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Координаты вектора

Если $A(x_1; y_1; z_1)$ начало вектора, а $B(x_2; y_2; z_2)$ - его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overline{a}$ и имеет в заданной системе координат $Oxyz$, следующие координаты:

$$\boxed{\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}} \tag{55}$$

или

$$\boxed{\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\},}$$

где

$$a_x = \text{пр}_x \overline{a},$$

$$a_y = \text{пр}_y \overline{a},$$

$$a_z = \text{пр}_z \overline{a},$$

есть проекции вектора $\overline{a}$ на соответствующие оси координат Ox, Oy, Oz (их называют *координатами вектора* $\overline{a}$).

Длина вектора

Длиной или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка, она обозначается $|\overline{AB}|$:

$$\boxed{|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{56}$$

или

$$\boxed{|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{57}$$

Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором ($\overline{e}$).

Свойство проекции

Проекция вектора $\overline{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\overline{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\boxed{\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\varphi} \tag{58}$$

Орты осей координат

Единичные векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси, называются *ортами осей* :

$$\overline{i} = \{1; 0; 0\},$$

$$\overline{j} = \{0; 1; 0\},$$

$$\overline{k} = \{0; 0; 1\},$$

Разложение вектора по ортам координатных осей

Любой вектор $\overline{a}$, заданный в координатном пространстве $Oxyz$, можно представить в виде

$$\boxed{\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},}$$

где a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\overline{a}$.

Направляющие косинусы вектора

Направление вектора $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ определяется углами α, β, γ образуемыми им с осями координат Ox, Oy, Oz. Косинусы этих углов находят по формулам:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\overline{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\overline{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\overline{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned}}$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

Линейные операции над векторами

1) $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x + b_x)\overline{i} + (a_y + b_y)\overline{j} + (a_z + b_z)\overline{k} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$
2) $\lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot a_x\overline{i} + \lambda \cdot a_y\overline{j} + \lambda \cdot a_z\overline{k} = \{\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\}$

Равенство векторов

Пусть $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда

$$\boxed{\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}}$$

Коллинеарность векторов

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ *коллинеарны* ($\overline{a}||\overline{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Условие коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$:

$$\boxed{\overline{a}||\overline{b} \Longleftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}}$$

Компланарность векторов

Три вектора компланарны, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Координаты точки

Вектор $\overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой $M(x; y; z)$, называют *радиус-вектором* точки M и обозначают $\overline{r}$, т.е. $\overline{OM} = \overline{r}$. Так как координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки M, то

$$\boxed{\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = \{x; y; z\}}$$

Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними

$$\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi}$$

или

$$\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}}$$

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
3) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$
3) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

Скалярное произведение ортов осей

$$\boxed{\overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k} = 1}$$

$$\boxed{\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{i} \cdot \overline{k} = 0}$$

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть векторы заданы своими координатами $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда

$$\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}}$$

Проекция вектора на заданное направление

$$\boxed{\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}, \qquad \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}}$$

Определение векторного произведения

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют третий вектор $\overline{c}$, определяемый следующим образом:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. модуль вектора $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$

3) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ после приведения их к общему началу ориентированы друг к другу соответственно как орты $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ (в правой системе координат они образуют так называемую правую тройку векторов)

Свойства векторного произведения

1) $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$

2) $(\lambda\overline{a})\times\overline{b} = \lambda(\overline{a}\times\overline{b}) = \overline{a}\times(\lambda\overline{b})$

3) $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$

4) $\overline{a}||\overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a}\times\overline{b} = \overline{0}$

Векторное произведение ортов осей

$$\boxed{\overline{i}\times\overline{i} = \overline{j}\times\overline{j} = \overline{k}\times\overline{k} = \overline{0}}$$

$$\boxed{\overline{i}\times\overline{j} = -\overline{j}\times\overline{i} = \overline{k}} \quad \boxed{\overline{j}\times\overline{k} = -\overline{k}\times\overline{j} = \overline{i}} \quad \boxed{\overline{k}\times\overline{i} = -\overline{i}\times\overline{k} = \overline{j}}$$

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть векторы заданы своими координатами $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, тогда

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$$\boxed{S_{\text{пар}} = |\overline{a} \times \overline{b}|,}$$

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\overline{a} \times \overline{b}|}$$

Смешанное произведение $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$

Модуль смешанного произведения трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения

1) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot \overline{a} = (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot \overline{b}$

2) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$. Это равенство позволяет записывать смешанное произведение векторов без знаков векторного и скалярного умножения: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$

3) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c}$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$

4) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - компланарны $\Longleftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{0}$

5) если $\overline{a}\overline{b}\overline{c} > 0$, то $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - правая тройка, если $\overline{a}\overline{b}\overline{c} < 0$, то $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - левая тройка

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть векторы заданы своими координатами $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\overline{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, тогда

$$\boxed{\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

Объем параллелепипеда

$$\boxed{V = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}|}$$

5. Аналитическая геометрия в пространстве

5.1. Уравнение плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \{A; B; C\}$:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \tag{59}$$

Вектор $\overline{n} = \{A; B; C\}$ называется *нормальным вектором плоскости.*

Общее уравнение плоскости

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{60}$$

Частные случаи:

$A = 0$ - плоскость параллельна оси Ox;
$B = 0$ - плоскость параллельна оси Oy;
$C = 0$ - плоскость параллельна оси Oz;
$D = 0$ - плоскость проходит через начало координат;
$A = B = 0$ - перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);
$A = C = 0$ - перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);
$B = C = 0$ - перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);
$A = D = 0$ - плоскость проходит через ось Ox;
$B = D = 0$ - плоскость проходит через ось Oy;
$C = D = 0$ - плоскость проходит через ось Oz;
$A = B = D = 0$ - совпадает с плоскостью xOy;
$A = C = D = 0$ - совпадает с плоскостью xOz;
$B = C = D = 0$ - совпадает с плоскостью yOz;

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость.

Пусть даны три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой, тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно двум векторам $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c, тогда получаем уравнение плоскости, проходящей через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Угол между двумя плоскостями

Угол φ между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится по формуле

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

Условие параллельности плоскостей

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

5.2. Уравнение прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определяется заданием какой-либо ее фиксированной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектора $\overline{S} = \{m; n; p\}$, параллельного этой прямой. Вектор $\overline{S}$ называется *направляющим вектором прямой.*

Векторное уравнение прямой имеет вид:

$$\boxed{\overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{S},} \tag{61}$$

где $\overline{r} = \{x; y; z\}$ - радиус-вектор произвольной точки на прямой, $\overline{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ - радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, t - скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать любые значения.

Параметрические уравнения прямой

От векторного уравнения прямой (61) нетрудно перейти к параметрическим уравнениям:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp \end{cases}} \tag{62}$$

Канонические уравнения прямой

Пусть $\overline{S} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - точка, лежащая на этой прямой. Уравнения

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \tag{63}$$

называют каноническими уравнениями прямой.

Замечание. Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (63) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \tag{64}$$

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}} \tag{65}$$

Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, то направляющий вектор $\overline{S}$ прямой можно найти как векторное произведение $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$:

$$\boxed{\overline{S} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}}$$

Замечание. Из уравнений (65) легко получить канонические уравнения прямой, взяв две какие-либо точки на прямой (65) и применив уравнения (64).

Угол между прямыми

Под углом между прямыми L_1 и L_2 понимают угол между их направляющими векторами $\overline{S}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\overline{S}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$, поэтому

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2}{|\overline{S}_1| \cdot |\overline{S}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}} \tag{66}$$

• Условие перпендикулярности двух прямых

$$\boxed{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0}$$

• Условие параллельности двух прямых

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Прямые

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

лежат в одной плоскости, если

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0} \tag{67}$$

Если величины m_1, n_1, p_1 не пропорциональны величинам m_2, n_2, p_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}} \tag{68}$$

• Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\boxed{\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}}$$

• Условие параллельности прямой и плоскости

$$\boxed{Am+Bn+Cp=0}$$

Расположение прямой и плоскости

Чтобы найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$, нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой $x=x_0+mt$, $y=y_0+nt$, $z=z_0+pt$. При этом:

1) если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то прямая пересекает плоскость

2) если $Am+Bn+Cp=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая параллельна плоскости

3) если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости

След прямой линии

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

5.3. Поверхности второго порядка

Сфера

В декартовой системе координат уравнение сферы с центром в точке $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R записывается в виде

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2} \qquad (69)$$

Канонические уравнения цилиндров второго порядка

- *Эллиптический цилиндр*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Частным случаем является круговой цилиндр $x^2 + y^2 = R^2$.

- *Гиперболический цилиндр*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- *Параболический цилиндр*

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси Oz, а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости xOy.

Уравнение конуса второго порядка

• Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

• Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oy

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0}$$

• Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Ox

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0}$$

Поверхности второго порядка общего вида

• *Эллипсоид*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

• *Однополостный гиперболоид*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

• *Двуполостный гиперболоид*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

• *Эллиптический параболоид*

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad (p>0,\ q>0)}$$

• *Гиперболический параболоид*

$$\boxed{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad (p>0,\ q>0)}$$

6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

6.1. Линии и поверхности уровня

Линия уровня

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называют линию $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

Поверхность уровня

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называют поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Частные производные первого порядка

• *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ *по независимой переменной* x называют конечный предел

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),} \tag{70}$$

вычисленный **при постоянном** y.

• *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ *по независимой переменной* y называют конечный предел

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),} \tag{71}$$

вычисленный **при постоянном** x.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полный дифференциал

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y} \tag{72}$$

Аналогично полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z} \tag{73}$$

Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называют частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \quad \text{и т.д.}$$

Так называемые *смешанные производные*, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

Дифференциалы высших порядков

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы второго и третьего порядка вычисляются по формулам

$$\boxed{\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2} \tag{74}$$

$$\boxed{\mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 z) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3} \qquad (75)$$

Дифференцирование сложных функций

• Пусть $z = f(x, y)$ где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} \qquad (76)$$

• Если $z = f(x, y)$ где $y = \varphi(x)$, тогда полная производная от z по x находится по формуле

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \qquad (77)$$

• Если же $z = f(x, y)$ где $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, то частные производные выражаются так:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}} \qquad (78)$$

Дифференцирование неявных функций

Производную неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y) = 0$, можно вычислить по формуле

$$\boxed{y' = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \qquad (79)$$

Аналогично вычисляются производные неявной функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \qquad (80)$$

Производная в данном направлении

Производная функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ в направлении вектора $\bar{l}$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,} \tag{81}$$

где α - угол, образуемый вектором $\bar{l}$ с осью Ox.

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная в данном направлении определяется аналогично

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\gamma,} \tag{82}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

Градиент функции

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ называют вектор с началом в точке M, координатами которого являются частные производные функции z:

$$\boxed{\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\bar{j} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right\}} \tag{83}$$

Градиент функции и производная в направлении вектора l связаны формулой

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_l(\text{grad } z)} \tag{84}$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\text{grad } z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \tag{85}$$

В случае функции $u = f(x, y, z)$ градиент функции равен

$$\boxed{\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\bar{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}} \tag{86}$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ записывается в виде:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M \cdot (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M \cdot (z - z_0) = 0, \qquad (87)$$

а уравнение нормали в этой же точке - в виде:

$$\frac{(x - x_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M} + \frac{(y - y_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M} + \frac{(z - z_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M} = 0. \qquad (88)$$

Необходимые условия экстремума функции

Максимум или минимум функции называют ее *экстремумом.*

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю:

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0}$$

Точки, в которых производные равны нулю, называют *стационарными точками.* Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума функции

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ - стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Положим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

$$\Delta = AC - B^2$$

Тогда:

• если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно, максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$)

• если $\Delta > 0$, то в точке M_0 экстремума нет

• если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование

7. Ряды

7.1. Числовые ряды

Основные понятия

Числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \tag{89}$$

где u_1, u_2,..., u_n,... - числа, называемые *членами ряда*, u_n - *общий член* ряда.

Сумма первых n членов ряда (89) называется n-й *частичной суммой* ряда и обозначается через S_n.

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм, то ряд (89) *сходится*, и этот предел называется суммой ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (89) *расходится*.

Ряд геометрической прогрессии

Ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \quad (a \neq 0) \tag{90}$$

называется рядом геометрической прогрессии:

- если $|q| < 1$, то ряд (90) сходится и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$
- если $|q| \geq 1$, то ряд (90) расходится

Необходимый признак сходимости числового ряда

Если ряд (89) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т.е. $u_n \to 0$, $n \to \infty$.

Достаточное условие расходимости числового ряда

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Гармонический ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...} \tag{91}$$

Гармонический ряд **расходится**.

7.2. Знакоположительные ряды

Первый признак сравнения

Даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

причем для всех n выполнено неравенство

$$u_n \le v_n$$

Тогда

- если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится

Второй признак сравнения

Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k,$$

то оба знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Признак Коши

Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C,$$

то этот ряд сходится при $C < 1$ и расходится при $C > 1$.

Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = m,$$

то этот ряд сходится при $m < 1$ и расходится при $m > 1$.

Интегральный признак

Если $f(x)$ при $x \geq 1$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Обобщенный гармонический ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ..., \quad (p > 0)} \tag{92}$$

Данный ряд сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

7.3. Знакопеременные ряды

Ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, т.е. ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^n u_n + ...$$

где $u_n > 0$, называют *знакочередующимся* рядом.

Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т.е.

1) $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Общий достаточный признак сходимости

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n + ...$$

сходится, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + ... + |u_n| + ...$$

В этом случае исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

7.4. Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + ...,$$

где x_0, a_0, a_1,..., a_n,... - действительные числа, называют *степенным рядом.*

Теорема Абеля

Если степенной ряд сходится при $x = a$, то он сходится абсолютно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < |a - x_0|$

Следствие

Для всякого степенного ряда существует *интервал сходимости* $|x - x_0| < R$ с центром в точке x_0, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится.

Число R - *радиус сходимости* степенного ряда. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только в точке $x = x_0$; если же $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

Для отыскания интервала и радиуса сходимости используют следующие способы:

1) $$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

2) $$\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}}$$

3) Во всех случаях интервал сходимости можно находить без определения радиуса сходимости, применяя признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из модулей членов данного ряда.

Ряд Тейлора

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ...} \tag{93}$$

Ряд Маклорена

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим ряд Маклорена

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ...} \tag{94}$$

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + ... \qquad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ...$$

$$x \in \begin{cases} [-1, 1], \ \alpha \geq 0, \\ (-1, 1], \ -1 < \alpha < 0, \\ (-1, 1), \ \alpha \leq 0 \end{cases}$$

8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

8.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные y', y'', ..., $y^{(n)}$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в самом общем виде записывается так

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в данное уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение последнее обращается в тождество.

Поскольку решение дифференциальных уравнений сводится к вычислению интегралов, то в состав решения входит набор постоянных $C_1, C_2, C_3, ...C_n$, т.е. получается бесчисленное множество решений. Количество постоянных равно порядку уравнения. Чтобы выделить из бесконечного множества решений то, которое описывает именно данный процесс, необходимо задать дополнительное условие, которое называется *начальным условием* ($y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$).

Общее решение дифференциального уравнения – это соотношение вида $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных.

Общий интеграл дифференциального уравнения – это общее решение, которое имеет неявный вид $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

Частное решение дифференциального уравнения – это общее решение при заданных значениях постоянных $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$.

Частный интеграл дифференциального уравнения – это общий интеграл при заданных значениях постоянных $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$.

Задача интегрирования дифференциального уравнения совместно с начальным условием называется начальной задачей или *задачей Коши*

8.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{95}$$

называют дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными - это уравнение вида

$$\boxed{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)} \tag{96}$$

Метод решения.

В уравнении (96) выразим производную y' через дифференциалы

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

т.е.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Умножим уравнение на $\mathrm{d}x$ и разделим на $f_2(y)$ (разделяем переменные)

$$\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\mathrm{d}x.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл в квадратурах

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\mathrm{d}x + C, \qquad f_2(y) \neq 0.$$

Далее нужно решить уравнение

$$f_2(y) = 0.$$

Если это уравнение имеет корни, то они также являются решениями уравнения (96).

Однородные дифференциальные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{97}$$

называется однородным, если

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)} \tag{98}$$

Метод решения.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки (замены)

$$\boxed{u = \frac{y}{x}} \qquad \text{или} \qquad \boxed{y = u \cdot x}$$

Подставляя в (97) замену

$$y = ux, \qquad y' = u'x + u,$$

имеем

$$u'x + u = f(x, ux),$$

а так как f удовлетворяет условию (98), т.е.

$$f(x, ux) = f(1, u) = \varphi(u)$$

приходим к уравнению

$$u'x + u = \varphi(u).$$

Последнее уравнение - уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \mathrm{d}x.$$

Найдя его общее решение (общий интеграл), следует заменить в нем u на $\dfrac{y}{x}$. Получим общее решение (интеграл) исходного уравнения.

Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его можно записать в виде

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \tag{99}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - заданные функции. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение (99) называют линейным неоднородным, а если $Q(x) \equiv 0$ - линейным однородным.

Метод вариации произвольной постоянной.

Уравнение (99) решаем в два этапа.

1) Ищем решение однородного уравнения:

$$y' + P(x)\,y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\,y = 0.$$

Разделяем переменные - умножаем на $\mathrm{d}x$, делим на y:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Интегрируем:
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \int P(x)\,\mathrm{d}x = C,$$
откуда
$$y = C \cdot e^{-\int P(x)\,dx}.$$

2) Заменяем постоянную C на функцию $C(x)$ (варьируем произвольную постоянную). То есть, ищем решение исходного уравнения (99) в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x},$$

где $C(x)$ - некоторая, подлежащая определению, функция.

Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y в исходное уравнение, что приводит к уравнению

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x).$$

Отсюда
$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1.$$
Тогда искомое общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1\right] \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Метод Бернулли.

Ищем решение исходного уравнения (99) в виде произведения двух функций:
$$\boxed{y = uv,}$$
где u, v - неизвестные функции от x. Дифференцируем:

$$\boxed{y' = u'v + uv'}$$

Подставляя замену в исходное уравнение (99), получаем

$$u'v + uv' + P(x)\,uv = Q(x) \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + P(x)\,v) = Q(x). \tag{100}$$

В качестве v возьмем любое, отличное от нуля, решение уравнения:

$$v' + P(x)\,v = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, т.е.

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + P(x)\,dx = 0.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int P(x)\,\mathrm{d}x = C.$$

Ввиду свободы выбора функции $v(x)$ можно положить $C = 0$. Отсюда

$$v = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Подставляя найденную функцию v в уравнение (100), получаем

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x).$$

Отсюда

$$\mathrm{d}u = Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Интегрируем

$$u = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем:

$$y = uv = \left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right] \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\boxed{M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0,} \tag{101}$$

где

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},} \tag{102}$$

называют уравнением в полных дифференциалах, т.е. левая часть такого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$:

$$\mathrm{d}U(x,y) = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y.$$

В этом случае уравнение (101) можно записать в виде $\mathrm{d}U(x,y) = 0$, а его общее решение определяется равенством $U(x,y) = C$.

Метод решения.

Так как

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

то

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad N(x,\ y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{103}$$

Проинтегрируем первое уравнение (103) по x:

$$\boxed{U(x,y) = \int M(x,y)dx \ + \ \varphi(y),} \tag{104}$$

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y. Для ее нахождения подставим U во второе уравнение (103):

$$N(x,y) \ = \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) \ + \ \varphi'(y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y) \ = \ N(x,y) \ - \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right).$$

Из последнего равенства находим $\varphi(y)$. Затем, подставляя $\varphi(y)$ в равенство (104), находим функцию $U(x,y)$. Решение выписываем в виде $U(x,y) = C$.

8.3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Уравнения вида $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$

Решение этого уравнения находится n-кратным интегрированием.

Интегрируя уравнение первый раз, получим:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Интегрируя еще раз, получим:

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2.$$

Интегрируя n раз, получим общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, достаточно положить

$$C_n = y_0,\ C_{n-1} = y_0',\ \ldots,\ C_1 = y_0^{(n-1)}.$$

Уравнения вида $\boxed{F(x, y', y'') = 0}$

В данном уравнении левая часть явно не зависит от y. Порядок такого уравнения можно понизить с помощью замены:

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= z(x), \\ y'' &= z'(x) \end{aligned}} \tag{105}$$

Тогда получим уравнение первого порядка

$$F(x, z, z') = 0.$$

Из этого уравнения находим его общее решение

$$z = \varphi(x, C_1).$$

Затем, возвращаясь к замене, находим y.

Уравнения вида $\boxed{F(y, y', y'') = 0}$

В этом уравнении левая часть явно не зависит от x. Уравнение этого вида допускает понижение порядка с помощью замены:

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= p(y), \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p \end{aligned}} \tag{106}$$

В этом случае исходное уравнение примет вид:

$$F(y, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим его общее решение

$$p = \varphi(y, C_1),$$

а затем, возвращаясь к замене, находим y.

Комплексные числа

Комплексное число — это выражение вида $\alpha+\mathrm{i}\,\beta$, где α, β — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен -1, то есть

$$\boxed{\mathrm{i}^2=-1} \qquad (\mathrm{i}=\sqrt{-1}).$$

Число α называется *действительной частью*, а число β — *мнимой частью* комплексного числа $z=\alpha+\mathrm{i}\,\beta$. Если $\beta=0$, то вместо $\alpha+0\mathrm{i}$ пишут просто α. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0,$$

у которого $D=b^2-4ac<0$. Отсюда следует, что действительных корней квадратное уравнение не имеет, но оно имеет два корня в поле комплексных чисел:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-1}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\alpha\pm\mathrm{i}\,\beta,$$

где $\alpha=-b/(2a)$, $\beta=\sqrt{4ac-b^2}/(2a)$.

Числа $\alpha+\mathrm{i}\,\beta$ и $\alpha-\mathrm{i}\,\beta$ называются *комплексно сопряженными* числами.

8.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами это уравнение вида

$$\boxed{a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0; \quad a_i=const; \quad a_0\neq 0} \qquad (107)$$

Метод решения.

Чтобы решить уравнение (107) надо составить *характеристическое уравнение*

$$\boxed{a_0k^n+a_1k^{n-1}+...+a_{n-1}k+a_n=0} \qquad (108)$$

и найти все его n корней: k_1,..., k_n. Тогда характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$a_0(k-k_1)(k-k_2)(k-k_3)\cdots(k-k_{n-1})(k-k_n) \;=\; 0. \qquad (109)$$

В зависимости от того, каковы корни этого характеристического уравнения различают разные способы построения решения.

Вещественные корни

1) Пусть корень k_1 однократный, то есть выражение $(k-k_1)$ входит в (109) только один раз. Тогда этому корню соответствует частное решение

$$y_1 \;=\; e^{k_1 x}$$

2) Пусть k_1 - корень кратности m, то есть $k_1 = k_2 = k_3 = ... = k_m$, тогда выражение $(k - k_1)$ входит в (109) m раз.

Этим кратным (одинаковым) корням соответствуют m линейно независимых частных решений:

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = x e^{k_1 x}; \quad y_3 = x^2 e^{k_1 x}; \quad \cdots \quad y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$$

Комплексные корни

1) Пусть комплексный корень k_1 однократный. Тогда паре корней $k_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$, $k_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ соответствуют два частных решения

$$y_1 \;=\; e^{\alpha x}\;\cos\beta x; \quad y_2 \;=\; e^{\alpha x}\;\sin\beta x$$

2) Пусть $k_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ - комплексный корень кратности m. Тогда комплексно сопряженное значение $k_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ также является корнем кратности m и выражение $(k - k_1)(k - k_2)$ входит в (109) m раз.

Этим $2m$ корням соответствуют $2m$ частных линейно независимых решений:

$$\begin{array}{ll}
y_1 \;=\; e^{\alpha x}\;\cos\beta x; & y_{m+1} \;=\; e^{\alpha x}\;\sin\beta x; \\
y_2 \;=\; x\;e^{\alpha x}\;\cos\beta x; & y_{m+2} \;=\; x\;e^{\alpha x}\;\sin\beta x; \\
y_3 \;=\; x^2\;e^{\alpha x}\;\cos\beta x; & y_{m+3} \;=\; x^2\;e^{\alpha x}\;\sin\beta x; \\
\cdots & \cdots \\
y_m \;=\; x^{m-1}\;e^{\alpha x}\;\cos\beta x; & y_{2m} \;=\; x^{m-1}\;e^{\alpha x}\;\sin\beta x;
\end{array}$$

Общее решение

Общее решение уравнения (107) есть сумма частных решений:

$$y \;=\; C_1 y_1 \;+\; C_2 y_2 \;+\; ... \;+\; C_{n-1} y_{n-1} \;+\; C_n y_n,$$

где C_i, $i = \overline{1, n}$ - произвольные постоянные.

Частный случай

Пусть в уравнении (107) $n = 2$, т.е.

$$\boxed{a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0} \qquad (\diamond)$$

Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\boxed{a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0} \qquad (\diamond\diamond)$$

Обший вид решения линейного уравнения $(\diamond)$ зависит от дискриминанта ($D = a_1^2 - 4a_0a_2$) характеристического уравнения $(\diamond\diamond)$. Возможны случаи:

Дискриминант $(\diamond\diamond)$	Корни $(\diamond\diamond)$	Общее решение$(\diamond)$
$D > 0$	k_1, k_2 - вещественные, различные	$y = C_1\mathrm{e}^{k_1x} + C_2\mathrm{e}^{k_2x}$
$D = 0$	k_1, k_2 - вещественные, одинаковые	$y = C_1\mathrm{e}^{k_1x} + C_2x\mathrm{e}^{k_1x}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$ - комплексные	$y = C_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + C_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

8.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами это уравнение вида

$$\boxed{a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)} \qquad (110)$$

Метод решения неоднородного уравнения со специальной правой частью:

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]}$$

Здесь α и β - постоянные, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены от x соответственно n-й и m-й степени.

Суть этого метода заключается в следующем.

1) Вначале ищем общее решение y_{oo} однородного уравнения:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny \ = \ 0.$$

(метод решения линейного однородного уравнения описан выше).

2) Далее устанавливаем вид частного решения y^* исходного уравнения (110).

а) Если $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ - не корень характеристического уравнения

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

то частное решение уравнения (110) ищем в виде:

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[\widetilde{P}_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x]$$

б) Если $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ - корень характеристического уравнения кратности m, то частное решение ищем в виде:

$$y^*(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}x^m[\widetilde{P}_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x],$$

где $\widetilde{P}_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ - полные многочлены от x степени $s = \max\{n, m\}$:

$$\widetilde{P}_s(x) \;=\; A_0 \;+\; A_1x \;+\; A_2x^2 \;+\; \cdots \;+\; A_sx^s,$$

$$\widetilde{Q}_s(x) \;=\; B_0 \;+\; B_1x \;+\; B_2x^2 \;+\; \cdots \;+\; B_sx^s$$

с неопределенными коэффициентами A_i, B_i.

3) После того как установлен вид частного решения, подставляем y^* в уравнение (110) и находим неизвестные коэффициенты A_i и B_i, отождествляя коэффициенты подобных членов в правой и левой частях полученного выражения.

После чего выписываем общее решение исходного уравнения (110):

$$\boxed{y \;=\; y_{oo} \;+\; y^*}$$

Замечание. Если неоднородная часть $f(x)$ может быть представлена в виде суммы функций:

$$f(x) \;=\; f_1(x) \;+\; f_2(x) \;+\; f_3(x) \;+\; ...$$

То частное решение y^* также может быть представлено в виде суммы частных решений:

$$y^* \;=\; y_1^* \;+\; y_2^* \;+\; y_3^* \;+\; ...$$

каждое из которых удовлетворяет уравнению с правой частью в виде одной из функций $f_i(x)$:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y \ = \ f_i(x).$$

Частные случаи

<u>*Неоднородность вида*</u> $\boxed{f(x) = P_n(x)\ \mathrm{e}^{\alpha x}}$

В этом случае $\beta = 0$.

Если α - не корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y^* = \widetilde{P}_n(x)\ \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Если α - корень кратности m, то частное решение имеет вид:

$$y^* = x^m\ \widetilde{P}_n(x)\ e^{\alpha x}.$$

<u>*Неоднородность вида*</u> $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(M \cos \beta x + N \sin \beta x)}$

Здесь M, N - константы.

Если $\alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$ - не корни характеристического уравнения, то частное решение имеет вид:

$$y^* = \mathrm{e}^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Если $\alpha \pm \mathrm{i}\,\beta$ - корни кратности m, то частное решение имеет вид:

$$y^* = \mathrm{e}^{\alpha x} x^m (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Примеры контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Даны вершины треугольника A(2;-2), B(3;5), C(8;1). Найти

   1.1. периметр треугольника

   1.2. площадь треугольника

   1.3. уравнения прямых на которых лежат стороны треугольника

   1.4. внутренние углы треугольника

   1.5. длину высоты, опущенной из точки B; уравнение прямой на которой лежит высота

   1.6. длину медианы из точки A; уравнение прямой на которой лежит медиана

   1.7. уравнение прямой на которой лежит биссектриса CE

2. Уравнение линии привести к каноническому виду. Построить линию

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$$

Найти точки пересечения заданной линии с прямой $y = -x$.

3. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, если задана точка $M_1(2\sqrt{3}; 1)$ эллипса и его малая полуось равна 2.

4. Построить линию

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

Найти фокусы и эксцентриситет.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через вершину параболы

$$y = 4x^2 + 8x + 7$$

параллельно директрисе этой параболы.

Контрольная работа №2

Найти пределы

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9 - x^2}{1 - x^2 + 7x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{x \sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 10x - 9} - x\right)$

5)$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+1}$

Найти производную от функции

1)$y=\dfrac{x^5}{6}-\dfrac{4}{x}+\sqrt{x}-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^4}}$

2)$y=(x+1)2^{4x}-\sin^3(x^2+1)$

3)$y=\dfrac{x-2}{7x+5}$

4)$y=\operatorname{tg}^3\left(\sqrt{\dfrac{2x}{3}}\right)$

5)$y=\dfrac{1}{18}\ln\dfrac{x-5}{2x}-\mathrm{e}^{\sin(x/3)}$

6)$y=\dfrac{5}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{2x-3}}{3}$

Контрольная работа №3

Вычислить интегралы

1)$\displaystyle\int\frac{(2+3x^3)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

2)$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(4-3x)^7}$

3)$\displaystyle\int\frac{10x\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{3x^2-1}}$

4)$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-4x^2}}$

5)$\displaystyle\int\sin^3 2x\cos^4 2x\mathrm{d}x$

6)$\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x+1}\mathrm{d}x$

7)$\displaystyle\int\frac{x^3-4}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$

8)$\displaystyle\int\frac{2x}{(x+1)(x-1)^2}\mathrm{d}x$

Контрольная работа №4

1) Вычислить определенные интегралы

a)$\displaystyle\int_0^8\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+2}$

б) $\int_0^{\mathrm{e}-1} x\ln(x+1)\mathrm{d}x$

2)Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y+2x=0,\ x-1=0,\ x=3,\ y=0$

б) $x-y=0,\ xy=1,\ x=2$

3) Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ 3x_1+2x_2+x_3=10 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$$

4) Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15 \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15 \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36 \end{cases}$$

Контрольная работа №5

1. Даны точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;-1;1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overline{M_1M_2}$. Привести к общему виду. Построить плоскость.
2. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2;2)$ и параллельной вектору $\overline{S}=\{1;2;-2\}$. Найти след прямой на плоскости xOy. Построить прямую.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (1,1,-2) и перпендикулярной плоскостям $2x-y+z-3=0$ и $-x+2y+z+5=0$.
4. Даны уравнения прямой $x=2$, $y=2z+1$. Построить прямую. Найти углы прямой с осями координат.
5. Найти угол между прямой $-x-3y-2z+2=0$, $-2x+y-z-1=0$ и плоскостью yOz.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-0}{3}$ и через точку $(0;4;2)$.

Контрольная работа №6

1. Дана функция двух переменных $z=f(x,y)$.

$$z=\cos y+(y-x)\sin y$$

Найти а) $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$; б) $\mathrm{d}z$.

2. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением: $z^3 - 3xyz = x^2$.

3. Дана функция $z = f(x, y)$, точка A и вектор $\overline{p}$.

$$z = 3x^2y^2 + 5y^2x; \quad A(1;1); \quad \overline{p} = 2\overline{i} + \overline{j}$$

Найти градиент функции в точке A и производную $\dfrac{\partial z}{\partial p}(A)$.

4. Исследовать на сходимость знакоположительный ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}$

5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} - \dfrac{1}{6^2} - \ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$

Контрольная работа №7

Решить уравнения

1)$y' - (y^2 - 1)\mathrm{e}^{3x} = 0$

2)$(y^2 - 2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0$

3)$y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{5^x}{x^2}$

4)$x\mathrm{cos}y\mathrm{d}y + \mathrm{sin}y\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$

5)$(y - 3x^2 + 1)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$

Контрольная работа №8

Решить уравнения

1)$y^{IV} = \cos^2 x, \quad y(0) = \frac{1}{32},\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \frac{1}{8},\ y'''(0) = 0$

2)$\dfrac{y''}{x^4} - \dfrac{y'}{x^5} = 2$

3)$3yy'y'' = (y')^3 + 2$

4)$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$

5)$y'' - 6y' + 8y = 3e^{3x} + 2x^2$

Список литературы

[1] Демидович Б.П., *Краткий курс высшей математики* / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М., 207. – 654 с.

[2] Письменный Д., *Конспект лекций по высшей математике: Ч. 1* / Д. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 256 с.

[3] Письменный Д., *Конспект лекций по высшей математике: Ч. 2*/ Д. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 288 с.

[4] Лунгу К.Н., *Сборник задач по высшей математике : с контрольными работами. 1 курс* / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 576 с.

[5] Лунгу К.Н., *Сборник задач по высшей математике : с контрольными работами. 2 курс* / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 592 с.