КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
Кафедра экономико - математического моделирования

В.Л.Воронцова
Л.Н.Зайнуллина

«КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Учебно – методическое пособие

по дисциплине «Линейная алгебра»
для студентов, обучающихся
по направлению 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент»

Казань – 2016

УДК 514.12
ББК В(Б)

Принято на заседании кафедры экономико-математического моделирования
Протокол № 5 от 21 января 2016 года

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры ЭММ КФУ **А.Г. Багаутдинова;**
кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики Института транспортных сооружений
КГАСУ **Горская Т.Ю.**

Воронцова В.Л., Зайнуллина Л.Н.
«Кривые второго порядка. Аналитическая геометрия в пространстве». Учебно – методическое пособие/ В.Л. Воронцова, Л.Н.Зайнуллина. – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 67 с.

Данное учебно - методическое пособие способствует более глубокому изучению тем «Кривые второго порядка», «Аналитическая геометрия в пространстве», которые входят в курс «Линейная алгебра». Теоретический материал по каждой теме данного учебно-методического пособия дополнен достаточным количеством примеров с подробно разобранными решениями, графиками, банком тестов и типовых заданий для самостоятельной работы. В тексте по теме «Поверхности второго порядка» имеется экономическая интерпретация некоторых полученных решений, что развивает у студентов навыки применения математических методов в экономических исследованиях.

Настоящее учебно-методическое пособие адресовано, в первую очередь, студентам таких специальностей, как «Экономика» и «Менеджмент», а также широкому кругу читателей, интересующихся указанными проблемами.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Элементы аналитической геометрии в пространстве

ГЛАВА 1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Линия называется **кривой второго порядка**, если уравнение ее содержит переменные x и y во второй степени, либо их произведение xy.
Общий вид уравнения кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$

В определениях кривых второго порядка часто используется понятие *геометрического места точек.*

Определение. Геометрическим местом точек называется совокупность точек, обладающих одними и теми же, общими для них свойствами.
К кривым второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

§1.1 Окружность. Свойства уравнения окружности. Приведение уравнения окружности к каноническому виду

Определение. Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Окружность определена в прямоугольной системе координат, если заданы координаты ее центра и радиус. Пусть точка $C\ (a;\ b)$ - центр окружности, а R - ее радиус. Нарисуем окружность и выведем ее уравнение. Для этого на окружности возьмем произвольную точку $M\ (x;\ y)$ (Рис.1).
Из определения следует, что расстояние от точки M до центра C есть величина постоянная, равная радиусу R. Так как CM = R:

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим уравнение окружности:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (1.1.1)$$

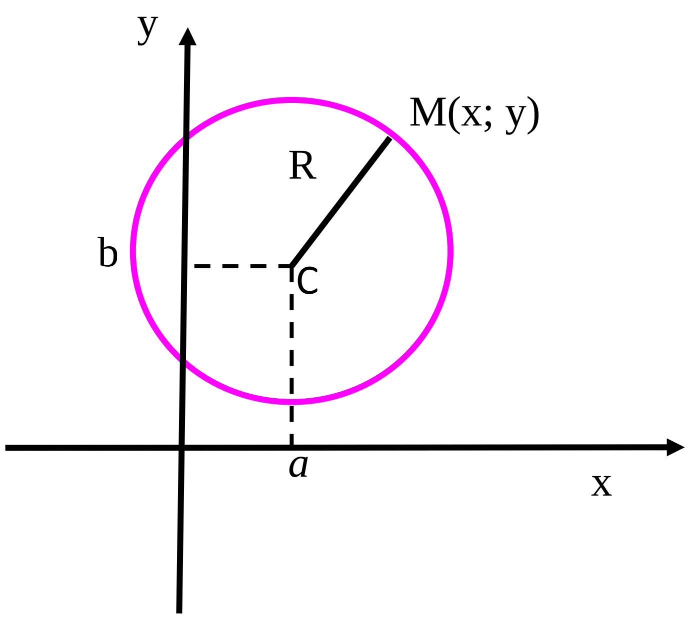

Рис. 1

Если центр окружности лежит в начале координат, то есть $a = 0, b = 0$, то уравнение окружности радиуса R будет

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Отметим свойства уравнения окружности. Для этого в уравнении (1.1.1)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

раскроем скобки и приведем его к общему виду уравнения кривой второго порядка:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

Обозначим $-2a = D$, $-2b = E$, $a^2 + b^2 - R^2 = F$.

Тогда уравнение окружности будет $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$

Сравнивая полученное уравнения и общий вид уравнения кривой второго порядка $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$ замечаем, что в уравнении окружности коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой: $A = C$, а произведение xy отсутствует, то есть $B = 0.$

Таким образом, необходимыми условиями того, что уравнение кривой второго порядка является уравнением окружности, будет $\boldsymbol{A = C, B = 0}$. Эти условия являются

необходимыми, но **не достаточными** условиями, так как, если после приведения общего уравнения кривой второго порядка к виду (1.1.1) в правой части уравнения (1.1.1) получится отрицательное число, то это уравнение не будет описывать окружность.

<u>Пример. 1</u>

Построить окружность $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

Решение. Для того, чтобы построить окружность, нужно знать координаты ее центра и радиус. Приведем уравнение окружности к виду (1). Для этого сгруппируем слагаемые, содержащие *x*, и отдельно слагаемые, содержащие *y*:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + 4 = 0$$

Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 4 = 0.$$

Тогда уравнение окружности получим в виде:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2.$$

Отсюда координаты центра C(2; -3) и радиус R = 3 окружности; построим окружность (Рис.2)

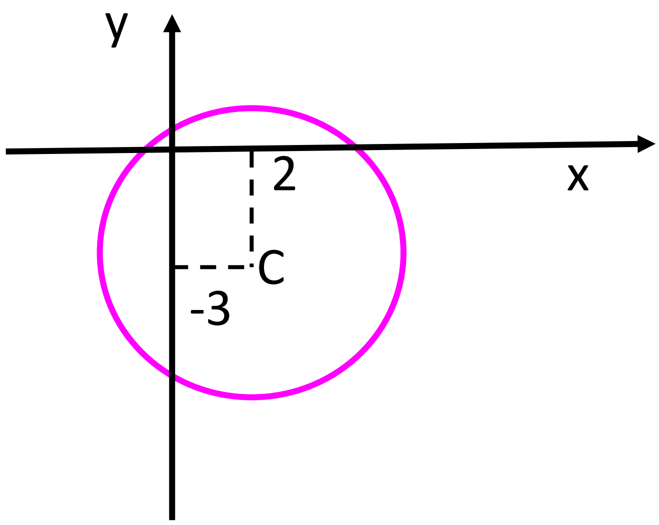

Рис. 2

§1.2. Эллипс, его каноническое уравнение и свойства.

Фокусы и эксцентриситет эллипса

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ ($a>0$).

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.2.1}$$

Эллипс имеет следующий график:

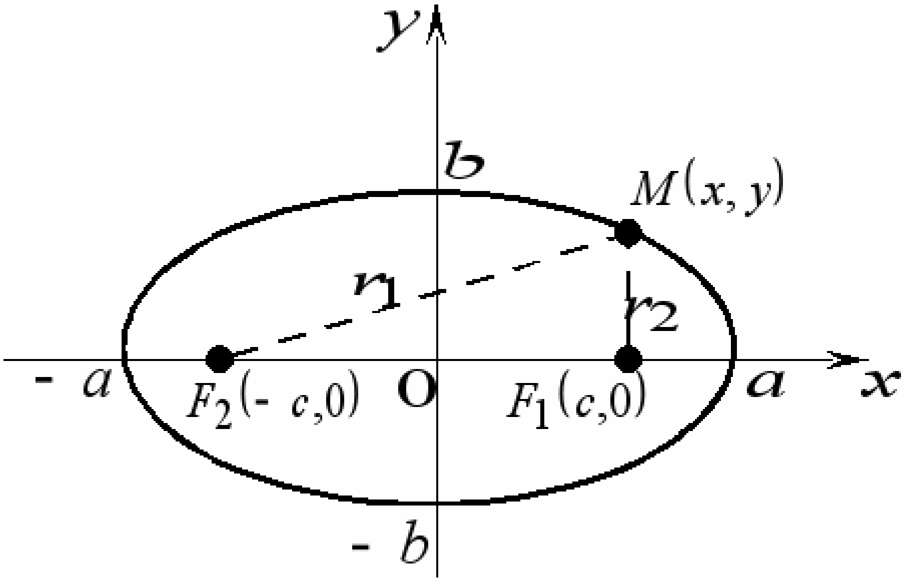

Рис.3

Замечание. Если $a < b$, то a–малая, а b-большая полуоси эллипса и рисунок эллипса будет вытянут вдоль оси ОУ.

Рассмотрим свойства эллипса.

Свойства эллипса

1. *Симметрия эллипса*. Эллипс симметричен относительно обеих осей координат.

2. *Вершины эллипса*. Вершинами эллипса являются точки: $(-a;0)$, $(a;0)$, $(0;-b)$, $(0;b)$.

3. *Полуоси эллипса*. Если $a > b$, то $2a$–длина большой оси, а $2b$ – длина малой оси эллипса, a и b – длины большой и малой полуосей эллипса соответственно (Рис.3). Если $a < b$, то a – малая, а b – большая полуоси эллипса.

   Замечание. Если a < b, то a – малая, a b – большая полуоси эллипса и рисунок эллипса будет вытянут вдоль оси ОУ.

4. *Фокусы эллипса*. Фокусы всегда располагаются на большой оси эллипса. При этом:

   а) если $a > b$, то точки $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ называются фокусами эллипса. Расстояние между ними называется фокальным расстоянием и равно $2c$, где

   $$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

   б) если $a < b$, то фокусами будут точки $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

5. Если $b = a$, то из уравнения эллипса получаем уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = a^2$.

6. *Эксцентриситет эллипса* – это показатель, характеризующий степень деформации окружности, при которой получится эллипс. **Эксцентриситетом эллипса** называется отношение фокального расстояния $2c$ к длине большой оси. При этом:

   а) если $a > b$, то $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$

   б) если $a < b$, то $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$.

Эксцентриситет эллипса всегда меньше 1: $0 \le \varepsilon < 1$.

7. Фокальные радиусы эллипса r_1 и r_2 - это расстояние от любой точки $M(x,y)$, лежащей на эллипсе, до фокусов $F_1(-c;0)$ и $F_2(c,0)$. Фокальные радиусы вычисляются как:

$$r_1 = a - \varepsilon x;\ r_2 = a + \varepsilon x\ .$$

Пример 2. Построить кривую $4x^2 + 25y^2 = 100$. Найти расстояние между ее фокусами, эксцентриситет и фокальные радиусы от точки M(3;1,6).

Решение:

Обе части уравнения кривой $4x^2 + 25y^2 = 100$ делим на 100, получим $\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1$ или $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ или $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, где a = 5, b = 2.

Тогда так как $a > b,$ то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Фокальные радиусы – есть расстояние от точки M(3;1,6) до фокусов точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Фокусы расположены в точках $F_1(-\sqrt{21};0), F_2(\sqrt{21};0).$

Фокальные радиусы равны: $r_1 = a - \varepsilon x = 5 - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot 3;\ r_2 = a + \varepsilon x = 5 + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot 3$

Пример 3.

Написать уравнение кривой как геометрического места точек, сумма расстояний от которых до точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная 8. Определить вид кривой, если известно, что $F_1(0;-\sqrt{20}), F_2(0;\sqrt{20})$

Решение.

По определению кривая – есть эллипс, причем $a < b$. 2a = 8 или a = 4

По формуле находим b:

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \sqrt{20} = \sqrt{b^2 - 16} \Rightarrow 20 = b^2 - 16 \Rightarrow b^2 = 36$$

Итак, a = 4, b = 6.

§1.3. Гипербола, ее каноническое уравнение и свойства. Фокусы и эксцентриситет гиперболы. Асимптоты гиперболы

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

На координатной плоскости изобразим точки (фокусы) $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Произвольную точку гиперболы обозначим через $M(x;y)$. Расстояния от точки $M(x;y)$ до фокусов гипербол называются фокальными радиусами и обозначаются $MF_1 = r_1; MF_2 = r_2$

Если фокусы гиперболы $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ расположены на оси ОХ, то это гипербола с действительной полуосью a, мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами на оси Ох имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.3.1)$$

На рисунке 4 изображена гипербола с асимптотами K_1 и K_2 $(y = \pm\frac{b}{a}x)$, эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$, фокусами $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Для гиперболы всегда справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$, и поэтому $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$. Для любой точки гиперболы выполняется условие $\left|F_1M - F_2M\right| = 2a$, согласно определению гиперболы.

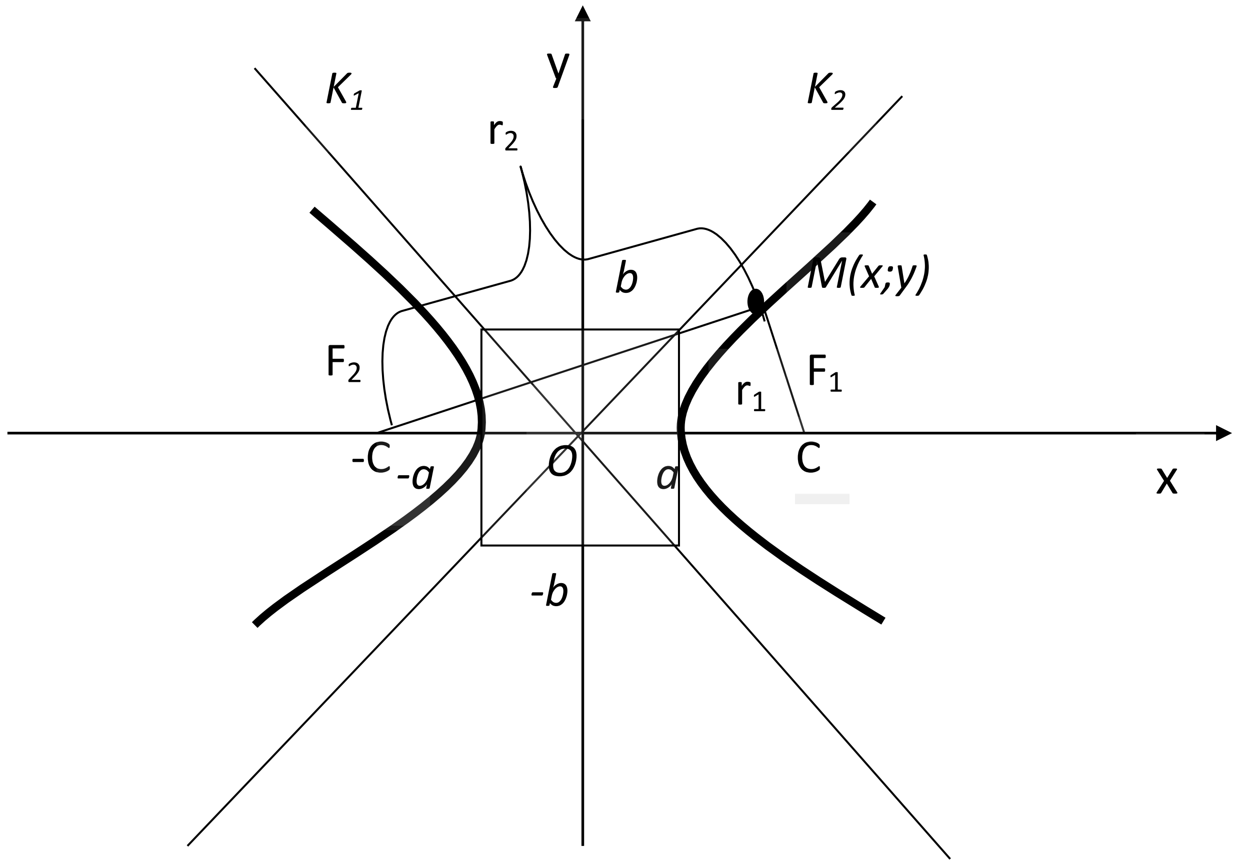

Рис. 4

Свойства гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) *Симметрия гиперболы*. Так как уравнение гиперболы содержит квадраты переменных, то гипербола симметрична относительно обеих координатных осей.
2) *Вершины гиперболы*. Точки пересечения гиперболы с осью абсцисс называются **действительными вершинами** параболы. Гипербола имеет две действительные вершины $(-a;0)$ и $(a;0)$. Точки на оси ординат называются **мнимыми вершинами** гиперболы. Гипербола имеет две мнимые вершины $(0;-b)$ и $(0;b)$.
3) *Полуоси гиперболы.* Ось абсцисс называется **действительной осью** гиперболы, а ось ординат – **мнимой осью**. Число a - действительная полуось, число

b - мнимая полуось гиперболы.

4) *Фокусы гиперболы.* Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ называются фокусами гиперболы. Фокусы гиперболы всегда располагаются на действительной оси. Поэтому действительную ось еще называют **фокальной**. Расстояние между фокусами называется **фокальным** и равно $2c$. Так как в уравнении (*)

$b^2 = c^2 - a^2$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

5) *Эксцентриситет гиперболы*. Отношение фокального расстояния к длине действительной оси называется **эксцентриситетом** гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$.

6) Если $b = a$, то гипербола называется **равнобочной**, уравнение ее имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

7) *Асимптоты гиперболы*.

Определение. **Асимптотой** кривой $y = f(x)$ называется такая прямая $y = kx + b$, к которой неограниченно приближаются ветви кривой при удалении ее точек в бесконечность.

Прямые, которые являются асимптотами гиперболы: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Асимптоты гиперболы являются диагоналями прямоугольника со сторонами, проходящими через вершины гиперболы параллельно осям координат. Асимптотами равнобочной гиперболы являются биссектрисы координатных углов.

8) *Фокальные радиусы* r_1 и r_2 вычисляются по формулам:

$$r_1 = |\varepsilon x - a|\,;\; r_2 = |\varepsilon x + a|$$

Если фокусы будут расположены на оси ординат в точках $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$, то уравнение гиперболы задается в виде

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (1.3.2)$$

На рисунке 5 изображен график гиперболы (1.3.2)

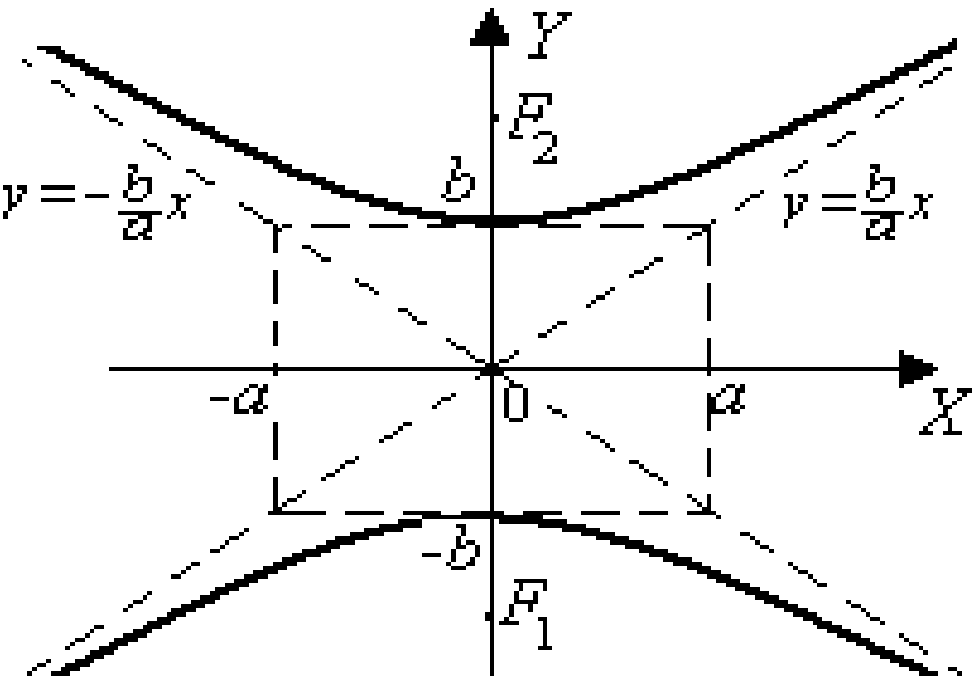

Рис. 5

Свойства гиперболы $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

1) *Симметрия гиперболы.* Так как уравнение гиперболы содержит квадраты переменных, то гипербола симметрична относительно обеих координатных осей.

2) *Вершины гиперболы*. Точки пересечения гиперболы с осью абсцисс называются **мнимыми вершинами** параболы: $(-a;0)$ и $(a;0)$. Точки на оси ординат называются **действительными вершинами** гиперболы: $(0;-b)$ и $(0;b)$.

3) *Полуоси гиперболы*. Число a - **мнимая полуось**, число b- **действительная полуось** гиперболы.

4) *Фокусы гиперболы.* Фокусами гиперболы являются точки $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$ и $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

5) *Эксцентриситет гиперболы* вычисляется как $\varepsilon=\frac{c}{b}>1$

6) *Асимптотами* гиперболы являются прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$

7) *Фокальные радиусы* r_1 и r_2 вычисляются по формулам:

$$r_1 = |\varepsilon y - b|\,;\, r_2 = |\varepsilon y + b|$$

Пример 4.

Фокусы гиперболы расположены на оси ОУ. Длина мнимой оси гиперболы равна 8, длина действительной оси равна 6. Написать каноническое уравнение гиперболы, найти ее эксцентриситет и асимптоты.

Решение:

Так как фокусы гиперболы расположены на оси ОУ, то гипербола с действительной полуосью $b = 6$, мнимой полуосью $a = 8$, и вершинами на оси ОУ имеет каноническое уравнение:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Прямые, являющиеся асимптотами гиперболы имеют вид $y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{8}{6} x = \pm \frac{4}{3} x$.

Пример 5.

Написать уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(\sqrt{6}, 0)$ и $B(-2\sqrt{2};1)$.

Решение.

Так как гипербола проходит через точки А и В, то подставляем в формулу координаты каждой из этих точек. Формула гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} = 1 \\ \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ \dfrac{8}{6} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = 3 \end{cases}$$

Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$$

§1.4. Парабола, ее каноническое уравнение и свойства. Фокус и эксцентриситет параболы. Директриса параболы

Определение. **Параболой** называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой **фокусом**, и от данной прямой, называемой **директрисой**.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается p $(p>0)$. Тогда фокус параболы имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Пусть $M(x;y)$- произвольная точка параболы. Расстояние от точки M до директрисы обозначим d, а фокальный радиус FM обозначим r. Согласно определению параболы $d = r$.

Каноническое уравнение параболы имеет два вида: $y^2 = 2px$ и $x^2=2py$.

На рисунке 6 изображен график данной параболы $y^2 = 2px$.

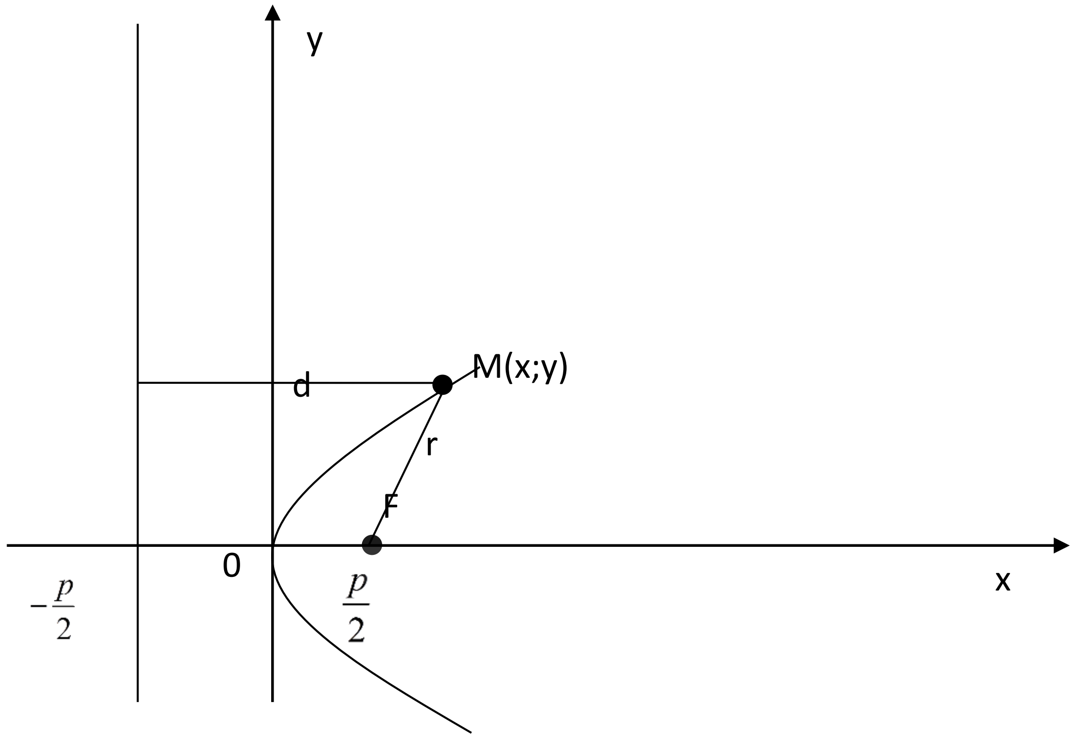

Рис. 6

Свойства параболы $y^2 = 2px$

1) Область определения: $x \in [0;+\infty)$; Множество значений: $y \in (-\infty;+\infty)$;

2) Вершины расположены в точке O(0;0) и ветви параболы направлены вправо;

3) Парабола симметрична относительно оси Ox.

4) Фокус параболы $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

5) Уравнение директрисы параболы $x = -\frac{p}{2}$.

6) Эксцентриситетом параболы называется отношение фокального радиуса точки M к расстоянию d от точки M до директрисы $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

7) Фокальный радиус: $r = x + \frac{p}{2}$.

Рассмотрим график и свойства параболы вида $x^2=2py$. На рис. 7 изображен график данной параболы.

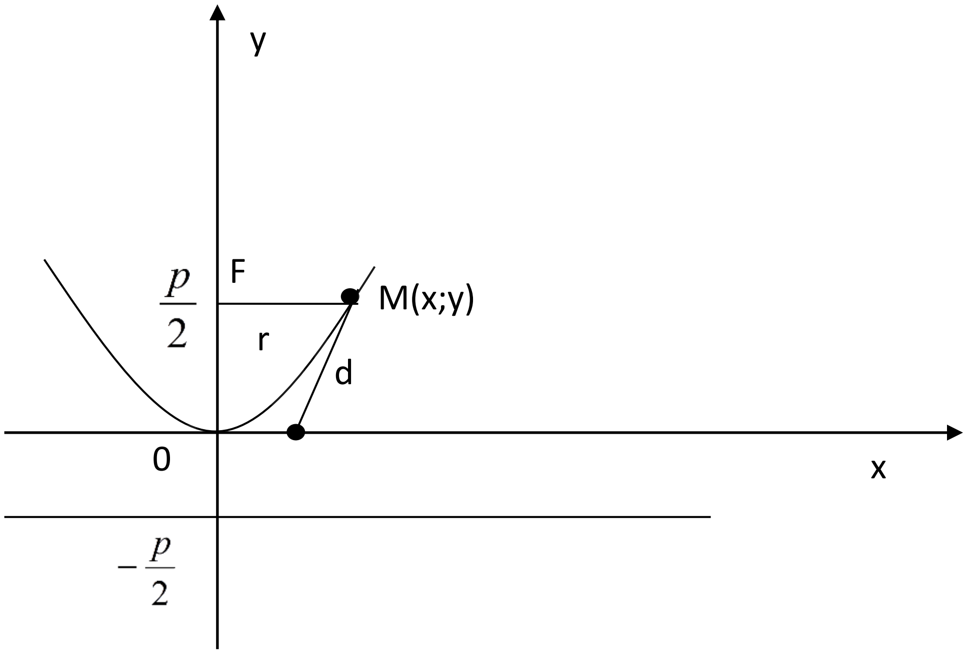

Рис. 7

Свойства параболы $x^2 = 2py$

1) Область определения: $x \in (-\infty;+\infty)$; множество значений: $y \in [0;+\infty)$;

2) Вершины расположены в точке O(0;0) Ветви параболы направлены вверх.

3) Парабола симметрична относительно оси Oy.

4) Фокус параболы: $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$

5) Уравнение директрисы: $y=-\frac{p}{2}$

6) Эксцентриситет параболы: $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$

7) Фокальный радиус: $r = y + \frac{p}{2}$

Замечание 1. Частным случаем параболы является парабола вида: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ с вершиной в точке $A(x_0;y_0)$. Фокус параболы находится как $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$, уравнение директрисы $x = x_0 - \frac{p}{2}$.

<u>Пример 6.</u>

Написать уравнение кривой как геометрического места точек, равноудаленных от точки F(0,6) и прямой y = - 6.

Решение

По определению данной кривой является парабола. Поскольку фокус лежит на оси ОУ, то уравнение параболы $x^2 = 2py$. Вычисляем параметр p по известному фокус F(0,6):

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right) = F(0;6) \Rightarrow \frac{p}{2} = 6 \Rightarrow p = 12$$

Получаем уравнение параболы $x^2 = 24y$.

<u>Пример 7.</u>

Дано уравнение параболы $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$. Найти координаты вершины, фокуса, уравнение директрисы параболы.

Решение.

Перенесем слагаемые, содержащие *x*, вправо. Слагаемые, содержащие *y*, оставим слева и выделим полный квадрат выражения:

$y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$ или $y^2 - 8y + 16 + 8 = 4x$ или $y^2 – 8y+16 = 4(x - 2)$ или

$(y - 4)^2 = 2*2(x - 2)$.

Из последнего выражения, получаем, что вершина параболы $A(x_0,y_0)$ = A(2,4), параметр p = 2.

Фокус $F(x_0+p/2; y_0)$ = F(2+1;4)= F(3;4).

Директриса имеет уравнение вида: $x = x_0 - \frac{p}{2} = 2 - \frac{2}{2} = 1.$

Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что называется кривой второго порядка и какой она имеет вид?
2. Что называется геометрическим местом точек?
3. Что называется окружностью и какова его формула?
4. Что называется эллипсом и какой вид имеет его каноническое уравнение?
5. Как вычисляются фокальное расстояние между фокусами в эллипсе?
6. Что называется эксцентриситетом эллипса и как он вычисляется?
7. Что называется фокальными радиусами эллипса и какова формула их нахождения?
8. Что называется гиперболой и какой вид имеет ее каноническое уравнение?
9. По какой формуле вычисляется фокальное расстояние между фокусами в гиперболе?
10. Что называется асимптотой гиперболы?
11. Какой вид имеют уравнения асимптот гипербол?
12. Что называется фокальными радиусами гиперболы и какова формула их нахождения?
13. Что называется параболой?
14. Какие канонические уравнения параболы Вы знаете?
15. Какими свойствами обладает парабола вида $x^2 = 2py$?
16. Какими свойствами обладает парабола вида $y^2 = 2px$?

Задания для самостоятельного решения

1. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что малая (мнимая) полуось b = 7, фокус F(13,0).

2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что большая (действительная) полуось полуось a = 8, эксцентриситет ε = 5/4.

3. Составить каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координаты F(4;2) и директриса x = 6.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что большая (действительная) полуось $a = 4$, фокус $F(3,0)$.
5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что большая (действительная) полуось $a=13$, эксцентриситет $\varepsilon = 14/13$.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координаты $F(3;3)$ и директриса $x=1$.
7. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что малая (мнимая) полуось $b=15$, фокус $F(-10,0)$.
8. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что эксцентриситет $\varepsilon = 5/3$, $A(6;0)$ - точка, принадлежащая кривой.
9. Составить каноническое уравнение параболы, если координаты вершины $A(2;3)$ и директриса $x=4$.
10. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что малая (мнимая) полуось $b=4$, фокус $F(-7,0)$.
11. Составить каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координаты $F(3;3)$ и директриса $x=1$.
12. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что малая (мнимая) полуось $b=5$, фокус $F(-10,0)$.
13. Составить каноническое уравнение гиперболы, если его эксцентриситет $\varepsilon = 5/4$, а $A(8;0)$ - точка, принадлежащая кривой.
14. Составить каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координаты $F(-2;1)$ и директриса $x=6$.
15. Составить каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет $\varepsilon = 10/11$ и большая (действительная) полуось $a=11$.
16. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что малая (мнимая) полуось $b=6$, фокус $F(12,0)$.
17. Составить каноническое уравнение параболы, если вершины параболы имеет координаты $A(2;2)$, а $B(3;4)$ – точка принадлежащая параболе.

18. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{22}/_6$ и большая (действительная) полуось a=12.

19. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что малая (мнимая) полуось b=4, фокус F(-11,0).

20. Составить каноническое уравнение параболы, если координаты вершины A(-1;2) и директриса x=5.

21. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что малая (мнимая) полуось b=5, эксцентриситет эллипса ε = 12/13.

22. Составить каноническое уравнение гиперболы, если его эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{10}$, а точка A(3,0) принадлежит гиперболе.

23. Составить каноническое уравнение параболы, если фокус имеет координаты F(-4;2) и директриса x=-6.

24. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что большая (действительная) полуось a=6, фокус имеет координаты F(-4;0).

25. Составить каноническое уравнение гиперболы, если его эксцентриситет ε = 4/3, большая (действительная) полуось a=9.

26. Составить каноническое уравнение параболы, если вершины параболы имеет координаты A(1;1), а B(3;-1) – точка принадлежащая параболе.

27. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, малая (мнимая) полуось b=4, фокус F(9,0).

28. Составить каноническое уравнение гиперболы, если его эксцентриситет

ε = 7/6, большая (действительная) полуось a=6.

29. Составить каноническое уравнение параболы, если координаты вершины A(2;3) и директриса x=4.

30. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, большая (действительная) полуось a=15, эксцентриситет ε =17/15.

Тестовые задания по теме «Кривые второго порядка»

1. Общий вид уравнения кривой второго порядка имеет вид

a. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

b. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F=1$

c. $Ax^2 + Bxy^2 + Dx+ F = 0$

d. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$

2. Уравнение окружности имеет вид

a. $(x - a)^2 +(y - b)^2 = R$

b. $(x - a)^2 +(y - b) = R^2$

c. $(x - a)^2 - (y - b)^2 = R^2$

d. $(x - a)^2 +(y - b)^2 = R^2$

3. Эллипсом называется геометрическое место точек

a. геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная a $(a>0)$

b. геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ $(a>0)$

c. геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ $(a>0)$

d. геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная a $(a>0)$

4. Уравнение эллипса имеет вид

a. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b. $\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y}{b^2} = 1$

c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

d. $\frac{x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

4. Расстояние между фокусами эллипса при a > b вычисляется по формуле

a. $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$

b. $2c=2\sqrt{b^2-a^2}$

c. $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$

d. $2c=2\sqrt{(a-b)^2}$

5. Эксцентриситет эллипса при $a > b$ вычисляется по формуле

a. $\varepsilon = b/c$

b. $\varepsilon = c/a$

c. $\varepsilon = c/b$

d. $\varepsilon = a/c$

6.Эксцентриситет эллипса обладает следующим свойством

a. $0 \le \varepsilon \le 1$

b. $0 \le \varepsilon < 1$

c. $0 < \varepsilon < 1$

d. $\varepsilon > 1$

7. Фокальные радиусы эллипса r_1 и r_2

a. это расстояние от любой точки $M(x,y)$, лежащей на эллипсе, до фокусов $F_1(-c;0)$ и $F_2(c,0)$

b. это расстояние от начала координат до фокусов $F_1(-c;0)$ и $F_2(c,0)$

c. это расстояние от любой точки $M(x,y)$, лежащей вне эллипса, до фокусов $F_1(-c;0)$ и $F_2(c,0)$

d. это сумма расстояний от любой точки $M(x,y)$, лежащей на эллипсе, до фокусов $F_1(-c;0)$ и $F_2(c,0)$

8. Фокальные радиусы эллипса вычисляются как

a. $r_1 = a - x;\ r_2 = a + x$

b. $r_1 = a - \varepsilon;\ r_2 = a + \varepsilon$

c. $r_1 = a - \varepsilon x;\ r_2 = a + \varepsilon x$

d. $r_1 = a - \varepsilon x^2;\ r_2 = a + \varepsilon x^2$

9. Гиперболой называется

a. геометрическое место точек, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

b. геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

c. геометрическое место точек, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная a.

d. геометрическое место точек, модуль суммы расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная a.

10. Если фокусы будут расположены на оси абсцисс в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то уравнение гиперболы имеет вид

a. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

c. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

d. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

11. Расстояние между фокусами гиперболы при $a > b$ вычисляется по формуле

a. $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$

b. $2c = 2\sqrt{b^2 - a^2}$

c. $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

d. $c = b - a$

12. Эксцентриситет гиперболы, когда a – действительная полуось, b – мнимая, вычисляется во формуле

a. $\varepsilon = b/c$

b. $\varepsilon = c/a$

c. $\varepsilon = c/b$

d. $\varepsilon = a/c$

13. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид

a. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

b. $x^2 + y^2 = a^2$

c. $x^2 - y^2 = a^2$

d. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

14. Эксцентриситет эллипса обладает следующим свойством

a. $0 \le \varepsilon \le 1$

b. $0 \le \varepsilon < 1$

c. $0 < \varepsilon < 1$

d. $\varepsilon > 1$

15. Если фокусы будут расположены на оси ординат в точках $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$, то уравнение гиперболы имеет вид

a. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

b. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

c. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

d. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$

16.Эксцентриситет гиперболы, когда a – мнимая полуось, b – действительная полуось, вычисляется по формуле

a. $\varepsilon = b/c$

b. $\varepsilon = c/a$

c. $\varepsilon = c/b$

d. $\varepsilon = a/c$

17. Фокальные радиусы гиперболы вычисляются как

a. $r_1 = a - x;\ r_2 = a + x$

b. $r_1 = a - \varepsilon;\ r_2 = a + \varepsilon$

c. $r_1 = a - \varepsilon x;\ r_2 = a + \varepsilon x$

c. $r_1 = |\varepsilon x - a|;\ r_2 = |\varepsilon x + a|$

18. Асимптоты гиперболы имеют вид

a. $y = \pm \frac{b}{a} x$

b. $y = \pm \frac{a}{b} x$

c. $y = \pm x$

d. $y = 1$

18. Параболой называется

a. геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

b. геометрическое место точек, равноудаленных от начала координат, и от данной прямой, называемой директрисой.

c. геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ $(a>0)$

d. геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой асимптотой.

19. Фокус параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Уравнение директрисы имеет вид

a. $x = \frac{p}{2}$

b. $x = -\frac{p}{2}$

c. $y = \frac{p}{2}$

d. $y = -\frac{p}{2}$

20. Парабола симметричная относительно оси ОХ имеет вид

a. $y^2 = 2px$

b. $y^2 = px$

c. $x^2 = 2py$

d. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

21. Парабола симметричная относительно оси ОУ имеет вид

a. $y^2 = 2px$

b. $y^2 = px$

c. $x^2 = 2py$

d. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

22. Парабола симметрична относительно оси ОУ. Директриса имеет вид

a. $x = \frac{p}{2}$

b. $x = -\frac{p}{2}$

c. $y = \frac{p}{2}$

d. $y = -\frac{p}{2}$

23. Уравнение параболы задано как $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$. Ее директриса имеет вид

a. $x = x_0 - \frac{p}{2}$

b. $x = x_0 + \frac{p}{2}$

c. $x = -\frac{p}{2}$

d. $y = -\frac{p}{2}$

24. Эксцентриситет параболы обладает следующим свойством

a. $0 \le \varepsilon \le 1$

b. $\varepsilon = 1$

c. $0 < \varepsilon < 1$

d. $\varepsilon > 1$

25. Для параболы $x^2 = 2py$ уравнение директрисы имеет вид

a. $x = \frac{p}{2}$

b. $x = -\frac{p}{2}$

c. $y = \frac{p}{2}$

d. $y = -\frac{p}{2}$

26. Для параболы $x^2 = 2py$ фокальный радиус имеет вид

a. $r = x - \frac{p}{2}$

b. $r = x + \frac{p}{2}$

c. $r = y - \frac{p}{2}$

d. $r = y + \frac{p}{2}$

27. Для параболы $y^2 = 2px$ фокальный радиус имеет вид

a. $r = x - \frac{p}{2}$

b. $r = x + \frac{p}{2}$

c. $r = y - \frac{p}{2}$

d. $r = y + \frac{p}{2}$

28. Уравнение параболы имеет вид $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$. Ее фокус

a. $F\left(x_0 - \frac{p}{2}; y_0\right)$

b. $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$

c. $F\left(x_0; y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$

d. $F\left(x_0; y_0 - \dfrac{p}{2}\right)$

29. Областью определения параболы $y^2 = 2px$ является

a. $x \in [0;+\infty)$

b. $x \in (-\infty;+\infty)$

c. $y \in [0;+\infty)$

d. $y \in (-\infty;+\infty)$

30.Областью значений параболы $y^2 = 2px$ является

a. $x \in [0;+\infty)$

b. $x \in (-\infty;+\infty)$

c. $y \in [0;+\infty)$

d. $y \in (-\infty;+\infty)$

ГЛАВА 2. *ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ*

§2.1. Плоскость. Виды уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей

Полупространство - это часть пространства, ограниченного какой-либо плоскостью.

Можно сказать, что полупространство - это часть пространства, для любых двух точек которого выполняется условие: отрезок с концами в этих точках не пересекает плоскость, которая ограничивает эту часть пространства.

Определение. Уравнением поверхности в пространстве называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$ с тремя переменными $x,y,z,$ которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой поверхности.

Простейшей поверхностью является плоскость (Рис. 8).

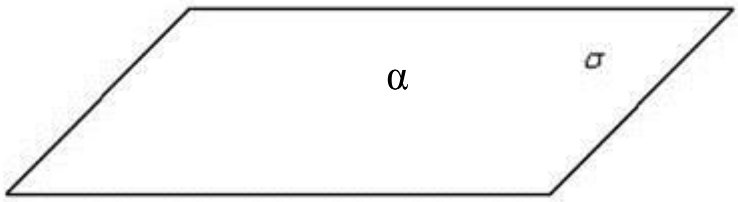

Рис.8

Векторное уравнение плоскости

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ рассмотрим плоскость $\alpha,$ вектор $\overline{N}(A;B;C)$, перпендикулярный плоскости α (нормальный вектор плоскости), фиксированную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ плоскости α и произвольную точку плоскости $M(x,y,z)$ (Рис. 8а).

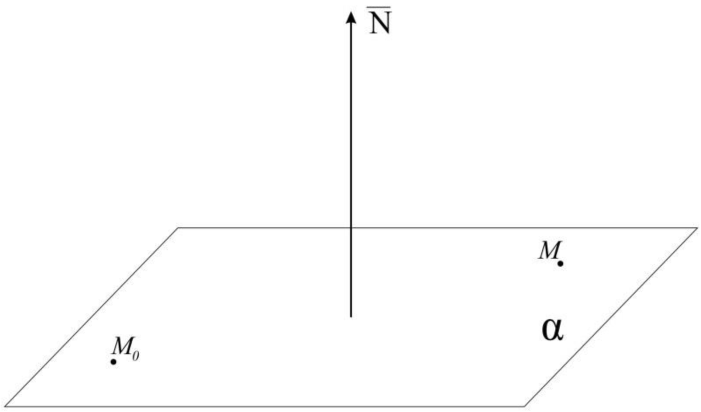

Рис. 8а

Теорема. Для того, чтобы произвольная точка M пространства принадлежала плоскости α, необходимо и достаточно выполнение равенства:

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0 \qquad (2.1.1)$$

Так как $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, то уравнение (2.1.1) при переходе к координатам запишется в виде :

$$A(x - x_0)+B(y - y_0)+C(z - z_0) = 0 \qquad (2.1.2)$$

Уравнение (2.1.1) называется векторным уравнением плоскости.

Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в уравнении (2.1.2) и введем следующее обозначение:

$$–Ax_0 – By_0 – Cz_0 = D.$$

Тогда получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D =0 \qquad (2.1.3)$$

В уравнении (2.1.3) должно выполняться условие:

$$A^2+B^2+C^2 \neq 0$$

Частные случаи уравнения (2.1.3):

а) $D=0$: $Ax+By+Cz=0$ (плоскость проходит через начало координат-точку O(0;0;0));

б) $C=0$: $Ax+By+D=0$ (плоскость параллельна оси Oz);

в) $B=0$: $Ax+Cz+D=0$ (плоскость параллельна оси Oy);

г) $A=0$: $By+Cz+D=0$ (плоскость параллельна оси Ox);

д) $C=D=0$: $Ax+By=0$ (плоскость проходит через ось Oz);

е) $A=D=0$: $By+Cz=0$ (плоскость проходит через ось Ox);

ж) $B=D=0$: $Ax+Cz=0$ (плоскость проходит через ось Oy);

з) $A=B=0$: $Cz+D=0$ (плоскость параллельна плоскости Oxy);

и) $B=C=0$: $Ax+D=0$ (плоскость параллельна плоскости Oyz);

к) $A=C=0$: $By+D=0$ (плоскость параллельна плоскости Oxz);

л) $A=B=D=0$: $z=0$ (плоскость совпадает с плоскостью Oxy);

м) $A=C=D=0$: $y=0$ (плоскость совпадает с плоскостью Oxz);

н) $B=C=D=0$: $x=0$ (плоскость совпадает с плоскостью Oyz).

Уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.

Пусть даны 3 точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$.

Смешанное произведение этих трех векторов равно нулю, так как они лежат в одной плоскости (компланарны):

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0 \qquad (2.1.4)$$

Уравнение (2.1.4) есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки в векторной форме. В координатной форме данное уравнение записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1.5)$$

Замечание 1. Смешанным произведением трех векторов называется скаляр $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, который численно равен объему параллелепипеда, построенного на данных векторах. Так как в нашем случае векторы компланарны, то объем параллелепипеда равен нулю.

Уравнение плоскости в отрезках

Если плоскость α не является параллельной координатным плоскостям, а начало координат O(0;0;0) не принадлежит этой плоскости, то уравнение плоскости может быть записано виде:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2.1.6)$$

Уравнение (2.1.6) называется уравнением плоскости в отрезках. Оно получается, если в уравнение (2.1.5) подставить координаты трех точек *(a;0;0); (0;b;0); (0;0;c)*.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть две плоскости α и β заданы своими общими уравнениями:

$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z=0$

$\beta: A_2x+B_2y+C_2z=0$

Замечание 2. Под углом между двумя плоскостями понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Он равен углу между нормальными векторами $\overline{N_1}, \overline{N_2}$ этих плоскостей (Рис. 9).

Тогда угол между двумя плоскостями находится по формуле:

$$Cos\varphi=\pm\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}$$

или в координатной форме:

$$Cos\varphi=\pm\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^{\;2}+B_1^{\;2}+C_1^{\;2}}\cdot\sqrt{A_2^{\;2}+B_2^{\;2}+C_2^{\;2}}} \tag{2.1.7}$$

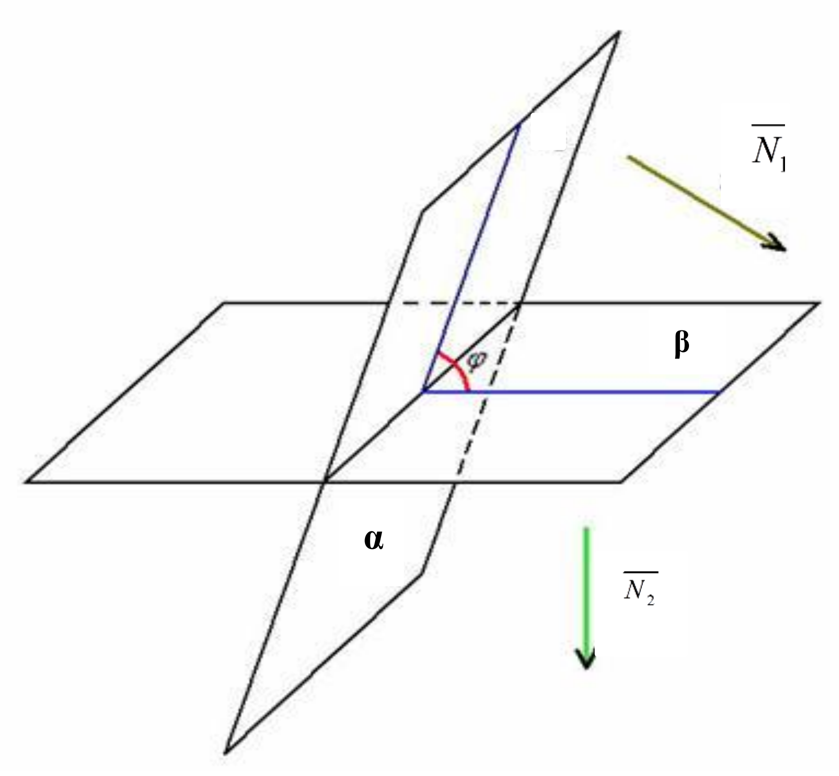

Рис. 9

Замечание 3. Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части уравнения (2.1.7).

Две плоскости будут **перпендикулярны**, если перпендикулярны соответствующие им нормали. Но если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0.$

Или в координатной форме:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 \qquad (2.1.8)$$

Полученное равенство есть условие перпендикулярности двух плоскостей α и β.

Две плоскости будут **параллельны** , если коллинеарны соответствующие им нормальные векторы. Условием коллинеарности двух векторов является пропорциональность их соответствующих координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (2.1.9)$$

Равенство (2.1.9) есть условие параллельности двух плоскостей α и β .

Перпендикулярные и параллельные плоскости изображены на рисунке 10.

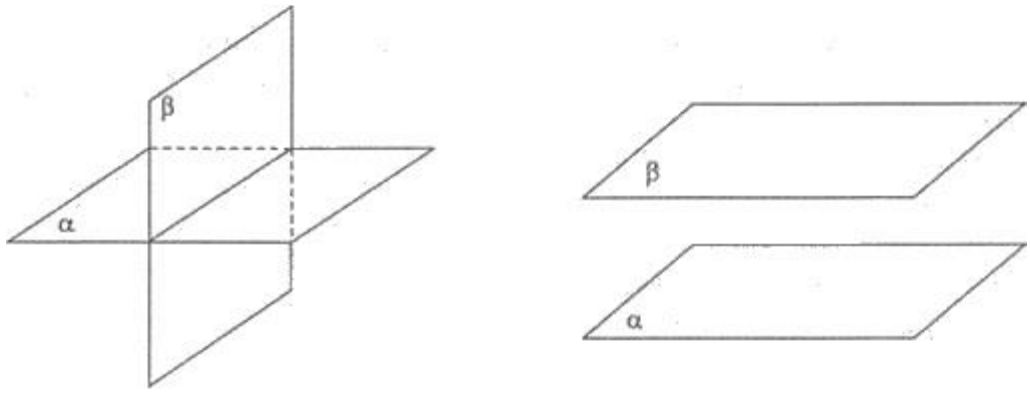

Рис. 10

Пусть задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и плоскость α своим общим уравнением:

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Расстояние d от точки M_0 до плоскости α будет определяться по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2.1.10)$$

Длина перпендикуляра M_0H и есть расстояние d от точки M_0 до плоскости α (Рис.11).

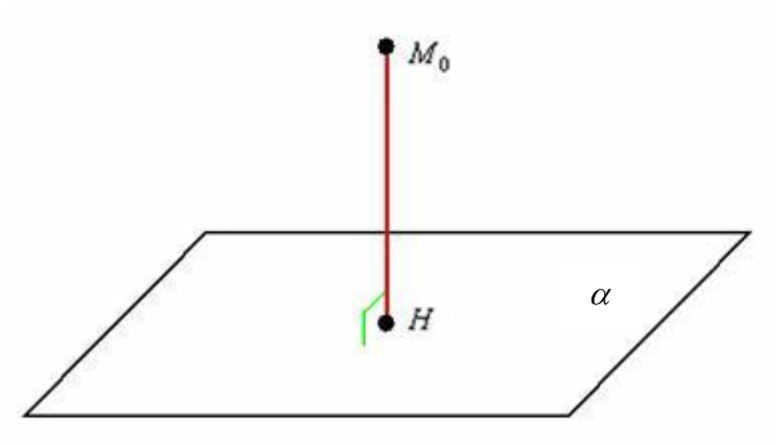

Рис. 11

<u>Пример 8.</u>

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(1;0;2), перпендикулярно плоскостям 2x-3y+2z-5 = 0 и 3x+2y-2z+8=0.

Решение

Уравнение плоскости проходящей через заданную точку M(1;0;2) имеет вид:

$$A(x-1)+B(y-0)+C(z-2)=0 \quad (*)$$

По условию перпендикулярности двух плоскостей $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, получаем:

$$\begin{cases} 2A-3B+2C=0 \\ 3A+2B-2C=0 \end{cases}$$

Сложив оба уравнения системы, получим 5A – B = 0 или $A = \frac{1}{5}B$

Умножим первое уравнение системы на 3, второе на 2, получим:

$$\begin{cases} 6A-9B+6C=0 \\ 6A+4B-4C=0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение и получим -13B+10C = 0 или $C = \frac{13}{10}B$.

Подставляем полученные выражения в уравнение (*):

$$\frac{B}{5}(x-1) + By + \frac{13B}{10}(z-2) = 0$$

Поделим обе части полученного уравнения на B и умножим на 10:

2(x - 1) + 10y + 13(z-2) = 0 или 2x + 10y + 13z - 28 =0 – есть искомое уравнение плоскости.

<u>Пример 9.</u>

Найти расстояние между плоскостью 4x+3y-z+20=0 и плоскостью, проходящей через три заданные точки $M_1(0;1;2)$, $M_2(1;0;3)$, $M_3(0;-1;-2)$.

Решение:

Записываем определитель третьего порядка для нахождения уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(0;1;2)$, $M_2(1;0;3)$,$M_3(0;-1;-2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1-0 & 0-1 & 3-2 \\ 0-0 & -1-1 & -4-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Получаем: 4x + 3y – z – 1 = 0.

Найдем координаты какой- нибудь точки, принадлежащей плоскости 4x+3y-z-1=0. Пусть x = 1,y = 1, тогда z = 6, то есть N(1;1;6).

У плоскости 4x + 3y – z + 20 = 0 коэффициенты A =4, B = 3,C = -1.

Тогда расстояние от точки N(1;1;6) до плоскости 4x + 3y – z + 20 = 0

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4\cdot 1 + 3\cdot 1 - 1\cdot 6 + 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{21}{\sqrt{26}}$$

§2.2. Прямая линия в пространстве. Виды уравнений прямой. Взаимное расположение прямых в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$l:\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

На рисунке 12 изображена прямая l со своим направляющим вектором $\overline{S}$ как пересечение плоскостей α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и β: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ с соответствующими нормальными векторами $\overline{N_1}, \overline{N_2}$.

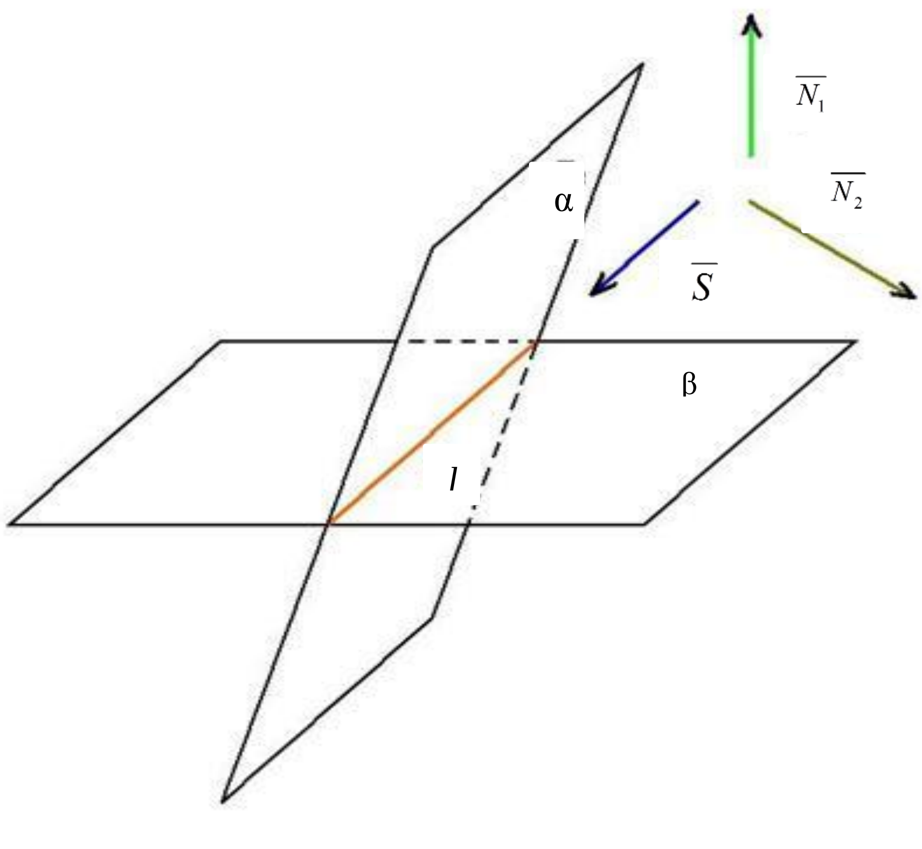

Рис.12

Пусть в пространстве задана прямая l со своим направляющим вектором $\overline{S}\{m; n; p\}$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая данной прямой. Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x;y;z)$ (Рис.13). Тогда из условия параллельности двух векторов $\overline{S}$ и $\overline{M_0M}$ можно записать:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (2.2.2)$$

Равенства (2.2.2) – это **каноническое уравнение прямой**, проходящей через данную точку. Если каждую дробь равенства (2.2.2) приравнять к некоторому числу t (параметру), то получим **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

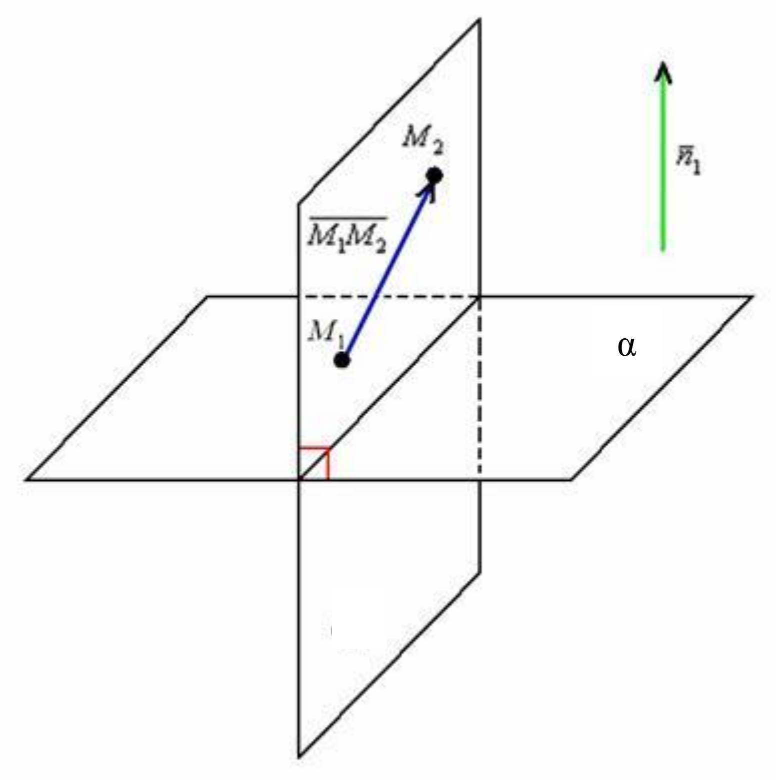

Рис.13

Пример 10.

Найти канонические уравнения прямойβ

$$\begin{cases} 3x+4y+z-5=0 \\ x+2y-5z-1=0 \end{cases}$$

Решение:

Обозначим за $\bar{S}\{m;n;\ p\}$ – направляющий вектор прямой, а за $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ – нормальные вектора плоскостей 3x+4y+ z-5=0 и x+2y-5z-1=0.

Если прямая задана в виде системы двух уравнений, то для составления канонических уравнений прямой нужно:

а) найти какую-нибудь точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, удовлетворяющую данной системе. Для этого полагаем $x_0 = 1$, подставляем в систему, решаем систему и получаем, что $y_0 = 2{,}5$ $z_0 = 1$. Итак, $M_0(1;2{,}5;1)$;

б) найти направляющий вектор $\bar{S}\{m;n;\ p\}$. Так как данная прямая - есть пересечение заданных плоскостей, то она перпендикулярна к каждому из векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$. Поэтому в качестве направляющий вектор $\bar{S}\{m;n;\ p\}$ можно взять вектор, перпендикулярный к векторам $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$, например их векторное произведение.

Координаты векторного произведения вычисляются

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)=\left(y_1z_2-y_2z_1,-x_1z_2+x_2z_1,x_1y_2-x_2y_1\right)$$

Координаты нормальных векторов плоскостей $\overline{N_1}(A_1;B_1;C_1)=\overline{N_1}(3;4;1)$

$\overline{N_2}(A_2;B_2;C_2)=\overline{N_2}(1;2;-5)$

$$\bar{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)=\left(-22;16;2\right)$$

Таким образом, m = -22, n = 16, p = 2.

Канонические уравнения прямой с направляющим вектором *S{-22;16;2}* и точка $M_0(1;2{,}5;1)$, принадлежащей данной прямой, будут иметь вид:

$$\frac{x-1}{-22}=\frac{y-2{,}5}{16}=\frac{z-1}{2}$$

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Если в качестве направляющего вектора прямой взять вектор $\overline{M_1M_2}$, то из уравнения (2.2.2) получим **уравнение прямой проходящей через две точки**:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{2.2.4}$$

Пусть даны две прямые l_1, l_2 со своими направляющими векторами $\bar{S}_1\{m_1;n_1;p_1\}$, $\bar{S}_2\{m_2;n_2;p_2\}$. Тогда **углом между двумя прямыми** будет угол между их направляющими векторами:

$$Cos\,\varphi=\pm\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}} \tag{2.2.5}$$

Пусть даны две перпендикулярные прямые a и b (Рис. 14)

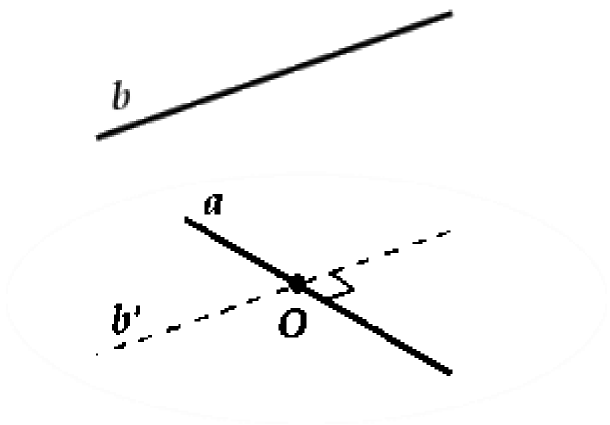

Рис. 14

Тогда условие перпендикулярности двух прямых записывается как:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \tag{2.2.6}$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{2.2.7}$$

На рисунке 15 изображены параллельные прямые в пространстве.

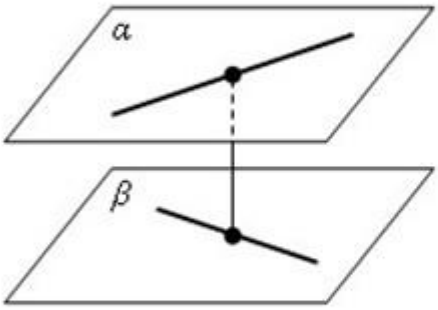

Рис.15

Пример 11.

Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;0;2)$ и $M_2(2;3;-3)$. Проверить условие параллельности и перпендикулярности прямых для полученной прямой и прямой $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.

Найти угол между этими прямыми.

Решение

Уравнение прямой проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{3-0}=\frac{z-2}{-3-2}\,или\,\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-5}$$

Для полученной прямой $m_1 = 1$, $n_1 = 3$,$p_1 = -5$.

У прямой $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z+1}{1}$ $m_2 = 2$, $n_2 = 5$,$p_2 = 1$.

Проверяем условие перпендикулярности прямых:

$m_1\cdot m_2 + n_1\cdot n_2 + p_1\cdot p_2 = 1\cdot 2 + 3\cdot 5 - 5\cdot 1 \neq 0$. Прямые не перпендикулярны.

Проверяем условие параллельности прямых и получаем, что прямые не параллельны, так как: $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{-5}{1}$.

Вычисляем угол между прямыми:

$$Cos\varphi = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 5 \cdot 1}{\sqrt{1+9+25} \cdot \sqrt{4+25+1}} = \frac{12}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{30}} = \frac{12}{5\sqrt{42}}$$

§2.3. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть задана прямая l c направляющим вектором $\overline{S}$ и плоскость α с нормальным вектором $\overline{N}$.

Угол между прямой и плоскостью можно определить по формуле:

$$Sin\,\varphi = Cos\,\psi = \pm\frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (2.3.1)$$

На рисунке 16 изображены прямая l c направляющим вектором $\overline{S}$ и плоскость α с нормальным вектором $\overline{N}$, углы φ и между прямой и плоскостью.

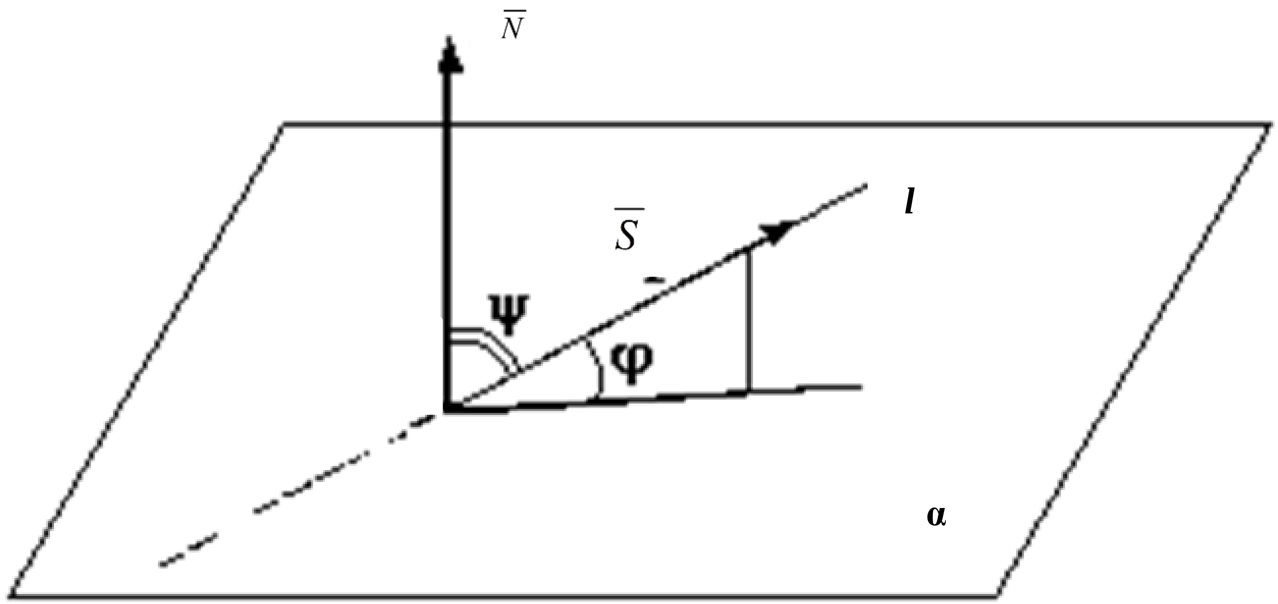

Рис. 16

Пусть задана прямая l с направляющим вектором $\overline{S}$ и перпендикулярная к ней плоскость α с нормальным вектором $\overline{N}$ (Рис. 17).

Тогда условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (2.3.2)$$

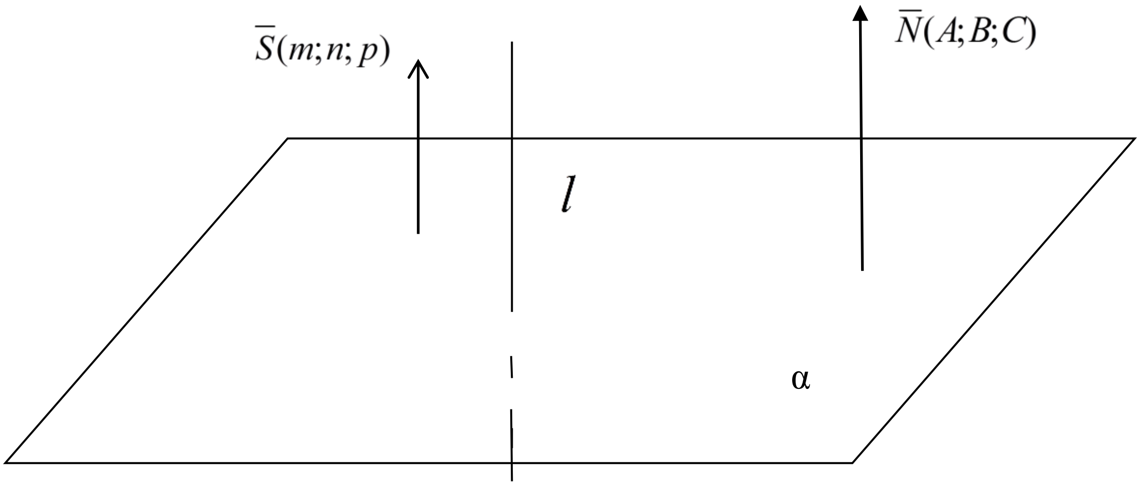

Рис. 17

А условие параллельности прямой и плоскости (Рис. 18) имеет вид:

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (2.3.3)$$

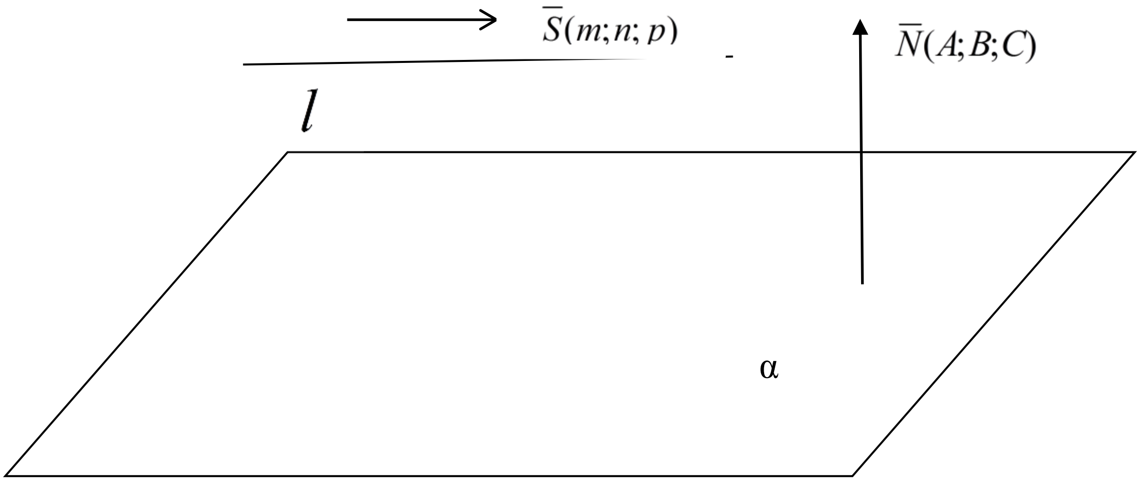

Рис. 18

<u>Пример 12.</u>

Установить взаимное расположение прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{1}$ и плоскости $x - 2y + 3z - 14 = 0$, а в случае их пересечения найти координаты точки пересечения.

Решение.

Проверяем условие параллельности прямой и плоскости $Am + Bn + Cp = 5\cdot 1 - 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \neq 0$, получаем, что они не параллельны.

Проверяем условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}\Rightarrow\frac{1}{5}\neq\frac{-2}{3}\neq\frac{3}{1}$, они не перпендикулярны.

Запишем уравнение прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{1}$ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} = \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Подставляем полученные x, y, z в уравнение плоскости:

$2 + 5t - 2(-1+3t) + 3(4 + t) - 14 = 0$ $2t + 2 = 0$ или $t = -1$

Полученное $t = -1$ подставляем в параметрические уравнения прямой и получаем $x = -3$, $y = -4$, $z = 3$.

Координаты точки пересечения прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{1}$ и плоскости $x-2y+3z-14 = 0$ есть $M_0(-3;-4;3)$.

§2.4. Поверхности второго порядка

Определение. ***Поверхностью второго порядка*** называется множество точек пространства, декартовы координаты *x,y* которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_0$– постоянные числа.

Это уравнение называется **общим уравнением поверхности второго порядка**.

Существует девять классов невырожденных поверхностей второго порядка, канонические уравнения которых можно получить из общего уравнения с помощью преобразований системы координат (параллельного переноса и поворота в пространстве осей координат). В результате этих преобразований получаем следующие канонические уравнения.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(эллипсоиды)}$$

На рисунке 19 изображен эллипсоид.

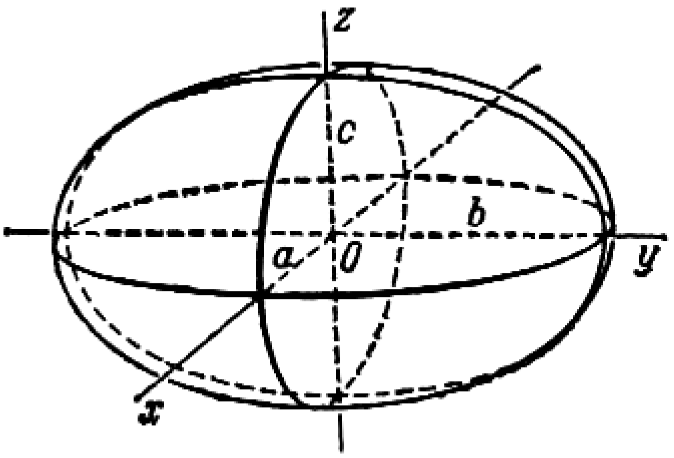

Рис. 19

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(однополостные гиперболоиды)}$$

На рисунке 20 изображен однополостный гиперболоид.

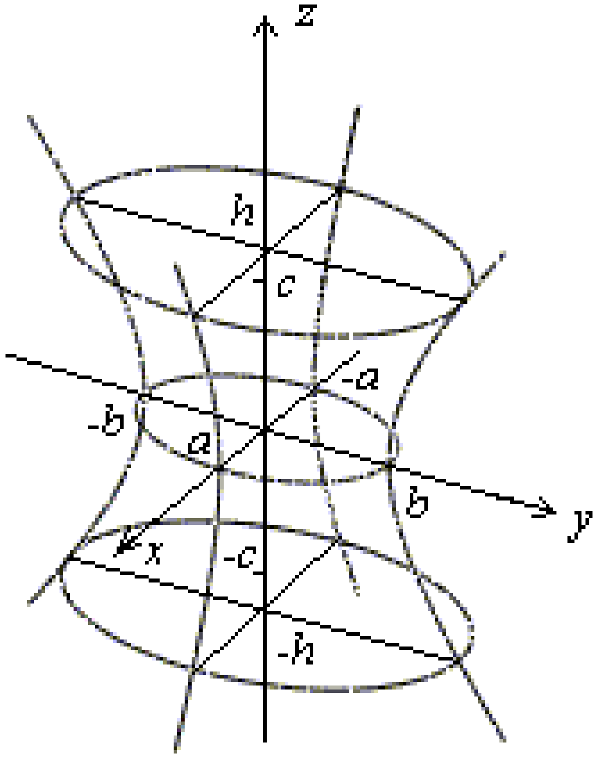

Рис. 20

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ (двуполостные гиперболоиды)

На рисунке 21 изображен двуполостный гиперболоид.

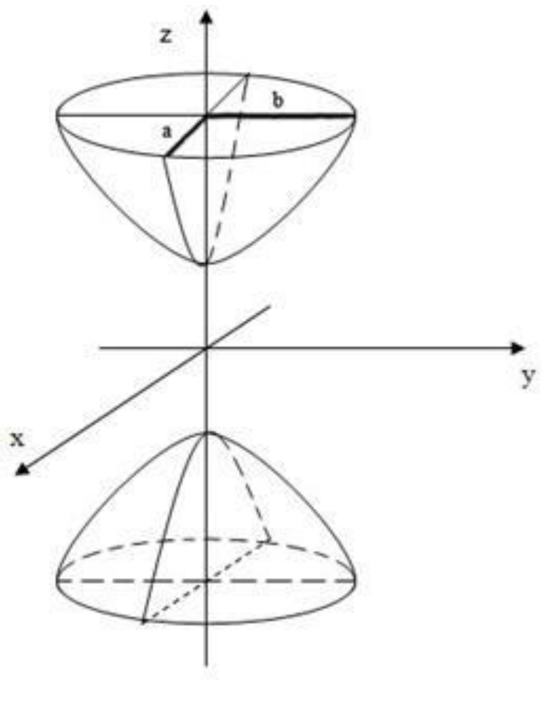

Рис. 21

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ (эллиптические параболоиды)

На рисунке 22 изображен эллиптический параболоид.

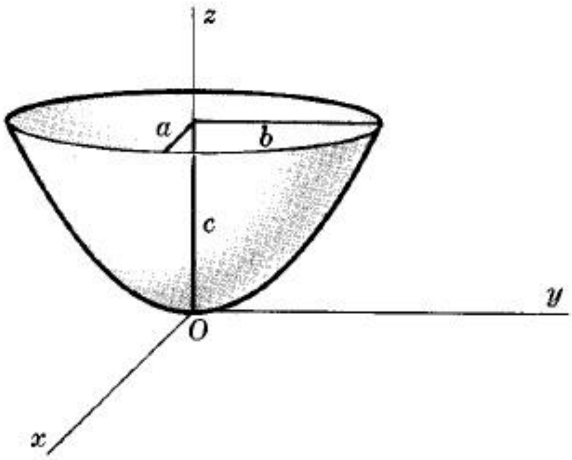

Рис. 22

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ (конусы второго порядка)

На рисунке 23 изображен конус второго порядка.

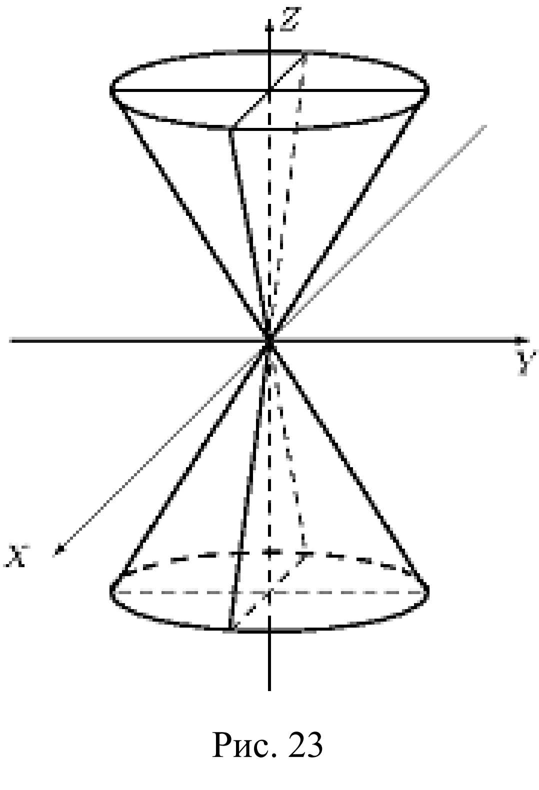

Рис. 23

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$ (гиперболические параболоиды)

На рисунке 24 показан график гиперболического параболоида.

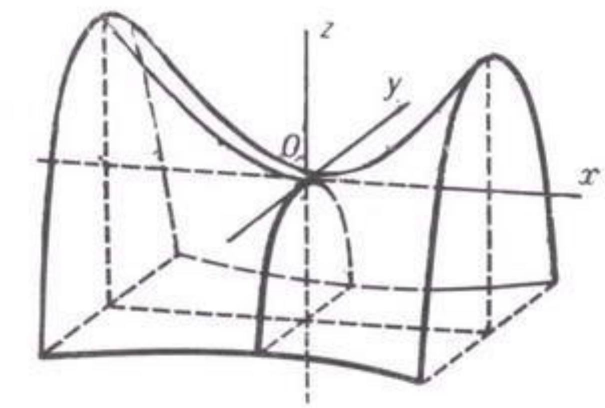

Рис. 24

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ (эллиптические цилиндры)

На рисунке 25 изображен эллиптический цилиндр.

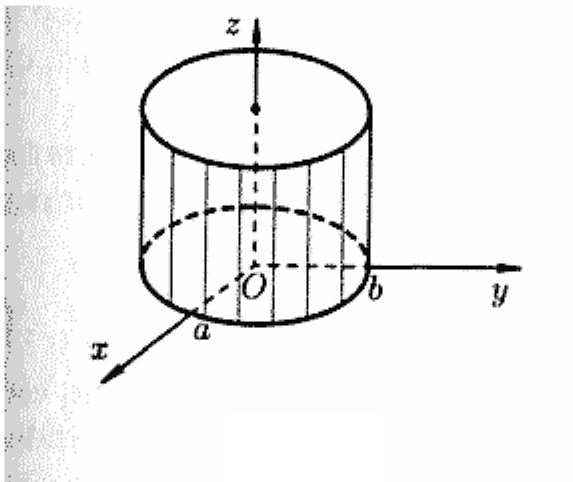

Рис. 25

$$x^2 = 2py \text{ (параболические цилиндры)}$$

На рисунке 26 изображен параболический цилиндр.

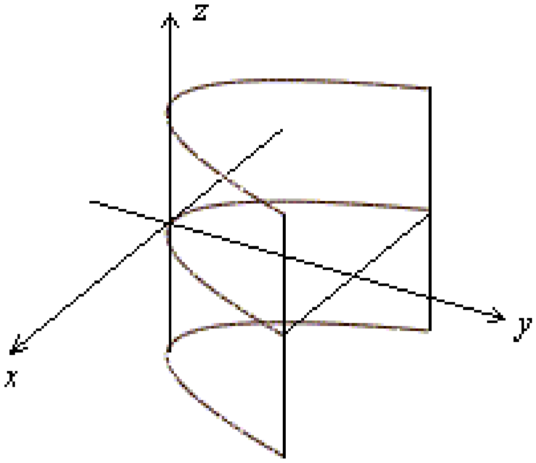

Рис. 26

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (гиперболические цилиндры)}$$

На рисунке 27 изображен гиперболический цилиндр.

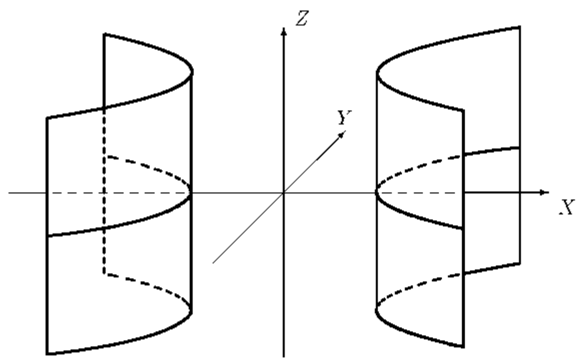

Рис. 27

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \text{ (сфера)}$$

На рисунке 28 изображена сфера с центром в в А($a;b;c$) и радиусом R.

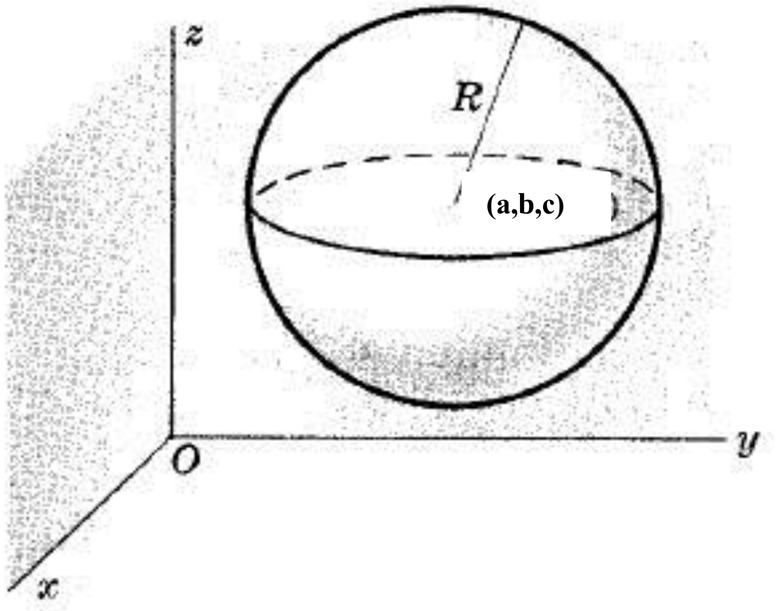

Рис. 28

Здесь параметры a,b,c,p–постоянные и положительные числа, характеризующие в определенном смысле свойства поверхностей.

В случае отсутствия членов с xy, xz, yz ($a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$)приведение общего уравнения к каноническому виду достигается методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Замечание. Канонические уравнения поверхностей второго порядка представляют собой функции двух переменных. Многие экономические функции являются функциями многих переменных, поэтому не исключено, что их уравнения и графики представляют собой поверхности второго порядка.

Примером двухфакторной производственной функции является функция Кобба – Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где Q - объем выпускаемой продукции, K – объем основного капитала, L – объем приложенного труда, $A > 0$ – коэффициент размерности, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ – постоянные, показывающие долю участия соответственно величин K и L в объеме выпускаемой продукции.

Функция зависит от двух переменных K и L и ее графиком в трехмерном пространстве будет некоторая поверхность, называемая *производственной поверхностью*. На рисунке 29 изображена эта поверхность.

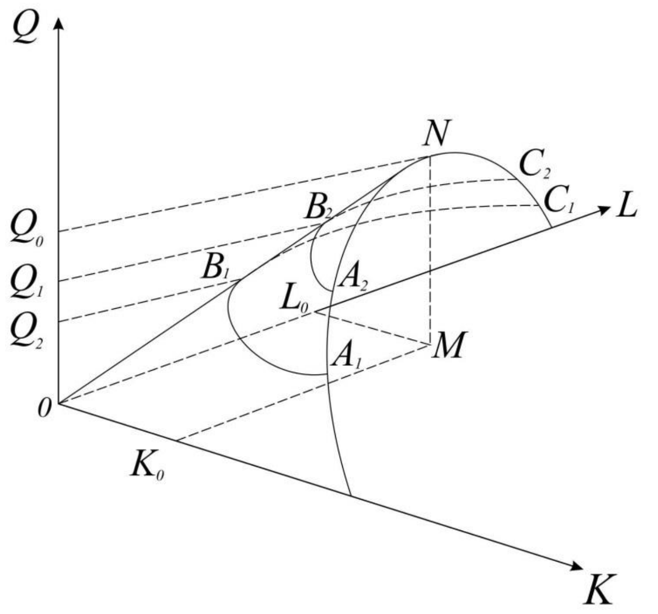

Рис. 29

На горизонтальной плоскости *KOL* по оси абсцисс откладываются производственные фонды K (ч), по оси ординат трудовые ресурсы L (чел.-ч), по оси аппликат – объем выпускаемой продукции Q.

Каждой точке производственной поверхности соответствует определенный объем выпускаемой продукции Q при данном сочетании затрат ресурсов K и L. Например, точке N соответствует объем Q_0, получаемый при сочетании ресурсов K_0 и L_0. Кривые на производственной поверхности, соединяющие точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 получаются сечением производственной поверхности плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости *KOL* и являются изоквантами для объемов Q_1 и Q_2.

Если предположить, что производственная поверхность пересекается вертикальными плоскостями, параллельными оси *OK* и отстоящими от нее по оси *OL* на расстоянии, например, L_1, L_2, L_3 $(L_1 < L_2 < L_3)$, то в сечении получатся кривые, каждая и из которых показывает изменение объема выпускаемой продукции Q в зависимости от изменения производственных фондов K при фиксированной величине трудовых ресурсов L (Рис.30).

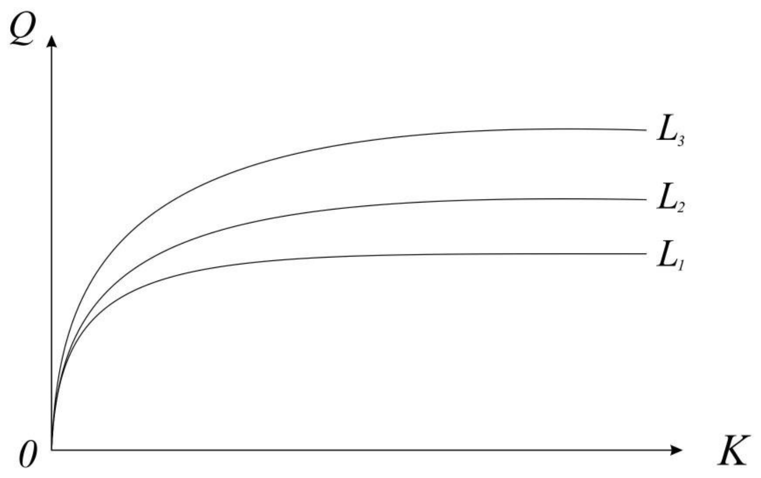

Рис. 30

В результате сечения производственной поверхности вертикальными плоскостями, параллельными оси OL, получим совокупность кривых, показывающих изменение объема выпускаемой продукции Q с изменением трудовых ресурсов L при фиксированной величине производственных фондов K. Вид этих кривых идентичен с кривыми на рисунке 29 .

<u>Пример 13.</u>

Издержки частного фермерского хозяйства по выращиванию племенных бычков определяются формулой $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=z$ где x – трудовые затраты, y – материальные затраты. Определить, при каких значениях x и y издержки z будут минимальными, если затраты на одного бычка составляют 9 у.е.

Решение:

Графиком функции $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=z$ является эллиптический параболоид. Его каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=2z,$ где a = 2, $b=\sqrt{8}$

Так как затраты на одного бычка составляют 9 у.е., то уравнение связи имеет вид x + y = 9, где x – трудовые, y – материальные затраты. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=z$ при x + y = 9.

Мы получили стандартную задачу на отыскание условного экстремума функции двух переменных. Выразим y = 9 - x и подставим в функцию издержек z и получим $z=\frac{x^2}{8}+\frac{(9-x)^2}{16}$

Чтобы отыскать экстремум функции z, находим ее производную и приравниваем к нулю.

$$z'=\frac{2x}{8}-\frac{2(9-x)}{16}=\frac{x}{4}-\frac{9-x}{8}$$

$\frac{x}{4}-\frac{9-x}{8}=0$ или 2x - (9-x) =0 или 3x – 9 = 0 и получаем, что x = 3.

Поскольку y = 9 - x = 9 - 3 = 6. Функция издержек

$$z=\frac{3^2}{8}+\frac{6^2}{16}=3{,}375 у.е.$$

Таким образом, при трудовых затратах x = 3 у.е. и материальных затратах y =6 у.е. издержки z частного фермерского хозяйства составляют 3,375 у.е.

Пример 14.

Привести к каноническому виду уравнение $x^2-2y^2+4z^2+2x-12y-8z-3=0$ выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности относительно системы координат *Oxyz.*

Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных (т.е. сгруппировав члены уравнения указанным ниже образом), получим:

$$(x^2+2x+1-1)-2(y^2+6y+9-9)+4(z^2-2z+1-1)-3=0$$

$$(x+1)^2-2(y+3)^2+4(z-1)^2=3+1-18+4=-10$$

$$\frac{(x+1)^2}{10}-\frac{(y+3)^2}{5}+\frac{(z-1)^2}{5/2}=-1$$

При параллельном переносе осей координат, задаваемом формулами:

$$x' = x+1;\ y' = y+3;\ z' = z-1$$

Начало координат новой системы окажется в точке O’(-1;-3;1), а уравнение поверхности примет канонический вид

$$\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{5} + \frac{z'^2}{5/2} = -1$$

Следовательно, данная поверхность - двуполостный гиперболоид, который имеет $a = \sqrt{10};\ b = \sqrt{5};\ c = \sqrt{5/2}$, вытянут вдоль оси, а центр его находится в точке O’(-1;-3;1).

Форма и свойства всех перечисленных выше поверхностей второго порядка устанавливаются с помощью **метода параллельных сечений**.

Суть метода состоит в том, что поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делается вывод о форме и свойствах самой поверхности.

<u>Пример 15.</u>

Установить форму и свойства однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1.$$

Решение.

Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z=h$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1 + \dfrac{h^2}{9} \\ z = h \end{cases}.$$

Видно, что в любом таком сечении получается эллипс с полуосями

$$a_1 = 4\sqrt{1 + h^2/9};\ b_1 = 2\sqrt{1 + h^2/9}.$$

Сечение плоскостями $x=h$ дает гиперболы:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{h^2}{4}, \\ x = h \end{cases}$$

а сечение плоскостями $y=h$–гиперболы:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{h^2}{4}, \\ y = h \end{cases}$$

(только с другими полуосями).

При h=0 получим сечения поверхности (однополостного гиперболоида) координатными плоскостями z = 0 или x = 0 или y = 0. Эти сечения называются главными. Размеры главных сечений очевидны: в плоскости z = 0 эллипс имеет полуоси a = 4;b = 2; в плоскости x = 0 гипербола имеет действительную полуось b = 2, мнимую c = 3; в плоскости у = 0 гипербола имеет действительную полуось a = 4, мнимую c = 3. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии поверхности.

Контрольные вопросы для самопроверки

1.Что называется полупространством?

2. Что называется уравнением поверхности?

3. Какой вид имеет общее уравнение плоскости?

4. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящее через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$?

5. Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящее начало координат?

6. Какой вид имеют уравнения плоскостей, проходящих через ось *OX, OУ, OZ* ?

7. Какой вид имеют уравнения плоскостей, параллельных осям *OX, OУ, OZ* ?

8. Какой вид имеют уравнения плоскостей, параллельных плоскостям *OXУ, OУZ, OXZ?*

9. Какой вид имеют уравнения плоскостей, совпадающих с плоскостями *OXУ, OУZ, OXZ?*

10. Какой вид имеет уравнение плоскости в отрезках?

11. По какой формуле вычисляется угол между двумя плоскостями?

12. Каково условие параллельности двух плоскостей?

13. Каково условие перпендикулярности двух плоскостей?

14. По какой формуле определяется расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости α?

15. Какой вид имеет каноническое уравнение прямой в пространстве?

16. Какой вид имеет параметрическое уравнение прямой в пространстве?

17. По какой формуле находится уравнение прямой, проходящей через две заданные точки?

18. По какой формуле вычисляется угол между двумя прямыми?

19. Каково условие параллельности двух прямых?

20. Каково условие перпендикулярности двух прямых?

21. По какой формуле вычисляется угол между прямой и плоскостью?

22. Каково условие параллельности прямой и плоскости?

23. Каково условие перпендикулярности прямой и плоскости?

24. Что называется поверхностью второго порядка?

25. Какой вид имеют общие уравнения поверхности второго порядка?

26. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипсоида?

27. Чем отличаются формулы однополостного и двухполостного гиперболоида?

28. Какой вид имеет каноническое уравнение конуса второго порядка?

29. Какой вид имеет каноническое уравнение эллиптического параболоида?

30. Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболического параболоида?

31. Какой вид имеет каноническое уравнение эллиптического цилиндра?

32. Чем отличаются формулы канонических уравнений параболического и гиперболического цилиндра?

33. Какой вид имеет каноническое уравнение сферы?

Задания для самостоятельной работы

1.Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1,8,2)$, $M_2(5,2,6)$, $M_3(5,7,4)$ и найти угол между данной плоскостью и плоскостью OXY.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,8,2)$, $M_2(4,10,9)$, и найти угол между данной прямой и плоскостью $2x+6y-5z+10=0$.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(10,9,6)$, $M_2(2,8,2)$, $M_3(9,8,9)$, и проверить условия параллельности и перпендикулярности для данной плоскости и плоскости $6x-10y+z-12=0$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(10,9,6)$, $M_2(2,8,2)$, $M_3(9,8,9)$, и найти угол между данной плоскостью и осью OXZ.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3,-1,2)$ и $M_2(8,5,8)$, и найти угол между данной прямой и прямой $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$.

6.Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3,-1,2)$, $M_2(-1,0,1)$, $M_3(1,7,3)$, и найти расстояние от точки $M_0(4,10,9)$ до данной плоскости.

7.Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3,5,4)$, $M_2(8,7,4)$, $M_3(5,10,4)$, найти угол между данной плоскостью о осью OYZ.

8.Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3,5,4)$, $M_2(4,7,8)$, и найти уравнение прямой M_3L, параллельной прямой $M_1 M_2$, если $M_3(7,10,3)$.

9.Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M1(3,1,4), M2(-1,4,1), M3(1,2,6), и проверить условия параллельности и перпендикулярности для данной плоскости и плоскости $3x-7y-8z-1=0$.

10.Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3,1,4)$, $M_2(0,5,-1)$, и найти угол между данной прямой и плоскостью $2x-3y+z+10=0$.

11. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3,5,4)$, $M_2(5,8,3)$, $M_3(1,3,-1)$, и привести к виду в отрезках на осях.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(2,4,3)$, $M_2(1,1,4)$, $M_3(4,7,3)$, и найти угол между данной плоскостью и плоскостью OXY.

13. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3,5,4)$ и $M_4(0,1,2)$, и найти угол между данной прямой и прямой $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+2}{5}$.

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(7,5,5)$, $M_2(-3,7,1)$, $M_3(5,6,7)$, и найти расстояние от точки $M_0(0,1,3)$ до данной плоскости.

15. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(7,5,5)$ и $M_2(5,8,2)$, и найти уравнение прямой M_3L, параллельной прямой M_1M_2, если $M_3(5,6,7)$.

16. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(0,4,1)$, $M_2(2,1,5)$, $M_3(1,6,2)$, и найти угол между данной плоскостью и осью OXZ.

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(0,4,1)$ и $M_2(3,-5,4)$, и найти угол между данной прямой и плоскостью $x+4y-7z+3=0$.

18. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(7,5,3)$, $M_2(9,4,4)$, $M_3(4,5,7)$, и проверить условия параллельности и перпендикулярности для данной плоскости и плоскости $x-9y+3z+11=0$.

19.Задано уравнение плоскости в виде в отрезках на осях $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{-2}=1$.

Написать уравнение прямой ML, перпендикулярной данной плоскости, если M(3,-1,4).

20. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1,8,2)$, $M_2(5,2,5)$, $M_3(5,7,3)$, и найти расстояние от точки $M_0(1,-1,2)$ до данной плоскости.

21. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(7,5,3)$ и $M_2(7,9,6)$, и найти угол между данной прямой и прямой $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+6}{1}=\frac{z+7}{-3}$.

22. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(6,1,1)$, $M_2(4,6,6)$, и найти уравнение прямой M_3L, параллельной прямой M_1M_2, если $M_3(4,2,0)$.

23. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(5,1,1)$, $M_2(4,6,3)$, $M_3(4,2,0)$, и привести к виду в отрезках на осях.

24. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(6,8,2)$, $M_2(5,4,8)$, $M_3(2,3,7)$, найти угол между данной плоскостью о осью OYZ.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(6,8,2)$, $M_2(5,4,3)$, и найти угол между данной прямой и плоскостью -2x-4y+5z+7=0.

26. Задано уравнение плоскости в виде в отрезках на осях $\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{1}=1.$

Написать уравнение прямой ML, перпендикулярной данной плоскости, если M(1,2,6).

27. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3,2,1)$, $M_2(4,4,5)$, $M_3(1,5,7)$, и проверить условия параллельности и перпендикулярности для данной плоскости и плоскости 3x-5y- z+13=0.

28.Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(7,5,3)$ и $M_2(7,9,6)$, и прямой, проходящей через точки $M_3(1,2,3)$, $M_4(3,4,5)$.

29. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1,2,3)$, $M_2(3,4,5)$, $M_3(4,5,7)$, и найти угол между данной плоскостью и плоскостью OXY.

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(4,6,5)$, $M_2(6,9,4)$, $M_3(2,10,10)$, и привести к виду в отрезках на осях.

Тестовые задания по теме

«Элементы аналитической геометрии в пространстве»

1. Общее уравнение плоскости имеет вид

a. $Ax+By+Cz+D = 0$

b. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

c. $Am+Bn+Cp = 0$

d. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$

2.Плоскость, проходящая через начало координат, имеет вид

a. $Ax+By+Cz=0$

b. $Ax+By+D=0$

c. $Ax+Cz+D=0$

d. $By+Cz+D=0$

3. Плоскость параллельная оси Oz имеет вид

a. $Ax+By+D=0$

b. $Ax+Cz+D=0$

c. $By+Cz+D=0$

d. $Ax+By=0$

4. Плоскость параллельная плоскости Oxy имеет вид

a. $Cz+D=0$

b. $Ax+D=0$

c. $By+D=0$

d. $z=0$

5. Плоскость параллельная плоскости Oyz имеет вид

a. $Cz+D=0$

b. $Ax+D=0$

c. $By+D=0$

d. $z=0$

6. Уравнение плоскости в отрезках имеет вид

a. $Ax+By+Cz+D = 0$

b. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

c. $Am+Bn+Cp = 0$

d. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$

7. Условие перпендикулярности двух плоскостей есть

a. $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

b. $Am+Bn+Cp = 0$

c. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

d. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

8. Условие параллельности двух плоскостей есть

a. $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

b. $Am+Bn+Cp = 0$

c. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

d. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

9. Расстояние d от точки M_0 до плоскости α будет определяться по формуле:

a. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}$

b. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

c. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2}$

d. $d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

10. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, имеет вид

a. $Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$

b. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

c. $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

11. Угол между двумя плоскостями находится как

$$a.Cos\varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$b.\sin \varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$c.Sin\alpha = \pm \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$d.Cos\varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 + D}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

12. Плоскость совпадающая с плоскостью Oyz имеет вид

a. $Ax+D=0$

b. $z=0$

c. $y=0$

d. $x=0$

13. Плоскость вида 3y + 5z=0

a. проходит через ось Oz

b. проходит через ось Ox

c. параллельна плоскости Oxy

d. параллельна плоскости Oxz

14. Плоскости 3x+5y-4z+10=0 2x+2y+4z-7 =0

a. проходят через начало координат

b. параллельны

c. перпендикулярны

d. проходят через ось OX

15. Плоскости3x+5y-6z=0 2x+y+z =0

a. проходят через начало координат

b. параллельны

c. перпендикулярны

d. проходят через ось OX

16. Каноническое уравнение прямой в пространстве, проходящей через заданную точку, имеет вид

$$a.\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

$$b.\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$$

$$c.\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$d.\ \frac{x+x_0}{m}=\frac{y+y_0}{n}=\frac{z+z_0}{p}$$

17.Параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$a.\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

$$b.\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$c.\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$$

$$d.\begin{cases}x=x_0-mt\\ y=y_0-nt\\ z=z_0-pt\end{cases}$$

18.Условие перпендикулярности двух прямых:

$$a)\ m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$b)\ \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$c)\ \frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}\neq\frac{p_1}{p_2}$$

$$d)\ Am+Bn+Cp=0$$

19. Условие параллельности двух прямых в пространстве

$$a)\ m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$b)\dfrac{m_1}{m_2} \neq \dfrac{n_1}{n_2} \neq \dfrac{p_1}{p_2}$

$c)\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

$d)Am + Bn + Cp = 0$

20. Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле

$a)Sin\varphi = \pm \dfrac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

$b)tg\varphi = \pm \dfrac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

$c)Cos\varphi = \pm \dfrac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2} + p_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^{\ 2} + p_2^{\ 2}}}$

$d)\sin\varphi = \pm \dfrac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2} + p_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^{\ 2} + p_2^{\ 2}}}$

21. Условие перпендикулярности прямой и плоскости есть

$a)Am + Bn + Cp = 0$

$b)\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

$c)\dfrac{A}{m} \neq \dfrac{B}{n} \neq \dfrac{C}{p}$

$d)Am + Bn + Cp \neq 0$

22. Условие параллельности прямой и плоскости есть

$a)Am + Bn + Cp = 0$

$b)Am + Bn + Cp \neq 0$

$c)\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

$d)\dfrac{A}{m} \neq \dfrac{B}{n} \neq \dfrac{C}{p}$

23. Угол между двумя прямыми в пространстве определяется по формуле

$a)\sin\varphi = \pm \dfrac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2} + p_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^{\ 2} + p_2^{\ 2}}}$

$$b) Cos\varphi = \pm \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2} + p_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^{\ 2} + p_2^{\ 2}}}$$

$$c) Sin\varphi = \pm \frac{A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$d) Cos\varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

24. Эллипсоид, как поверхность второго порядка, имеет вид

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$c) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$d) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

25.Однополосный гиперболоид, как поверхность второго порядка, имеет вид

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$c) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$d) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

26.Сфера, как поверхность второго порядка, имеет вид

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$b) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

$$c) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$d) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

27. Конус второго порядка имеет вид

$$a)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$b)(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$c)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$d)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

28.Поверхность вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ есть

a. конус второго порядка

b. двуполосный гиперболоид

c. эллипсоид

d. сфера

29. Поверхность вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ есть

a. эллипсоид

b. конус второго порядка

c. эллиптический цилиндр

d. параболический цилиндр

30.Эллиптический параболоид имеет вид

$$a)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$$b)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$$c)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$d)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Литература

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Из-во: «Физкультура и спорт». – М.,2014. – 240 с.
2.Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие / Под. ред. В.И.Ермакова. –М.: ИНФРА-М, 2008. – 575 с.
3.Математика:Учебное пособие для экономических специальностей ВУЗов. Ч.1/ Под ред. Р.Ш.Марданова. – Казань: Изд-во КГФЭИ, 1999. – 532 .
4.Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие / Часть 1. Под. ред. А.П.Рябушко. –Минск: «Вышэйшая школа», 1990. – 270 с.
5.Валитов Ш.М., Марданов Р.Ш. Математика в экономике.–М.: Экономика, 2011. – 182 с.

Учебное издание

Воронцова Валерия Леонидовна

Зайнуллина Лейсан Наилевна

«КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В ПРОСТРАНСТВЕ»

Учебно – методическое пособие

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28