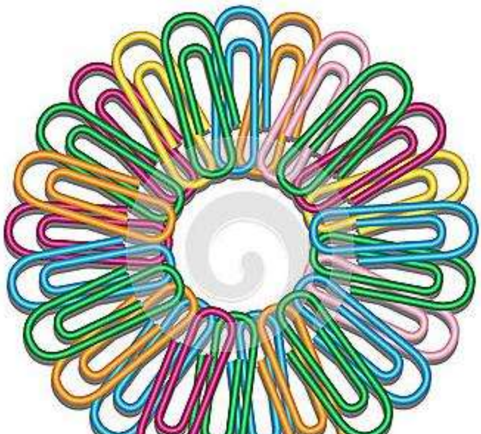
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ТАТАРСТАНА

2013-2014 УЧЕБНЫЙ ГОД



КАЗАНЬ – 2014

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся на районной и республиканской математических олимпиадах школьников Татарстана в декабре 2013 г. — январе 2014 г. Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

В составлении задач муниципального этапа олимпиады принимали участие преподаватели казанского университета:

И.С. Григорьева, М.И.Киндер,
В.А.Сочнева, В.В.Шурыгин-мл.

В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Автор-составитель: *М.И.Киндер*.
Компьютерный макет: *М.И.Киндер*.

Районный тур

7 класс

1. Для перевозки почты из почтового отделения на аэродром был выслан автомобиль. Самолёт с почтой приземлился раньше установленного срока, и привезённая почта была отправлена в почтовое отделение на попутной грузовой машине. Через 15 мин езды грузовая машина встретила на дороге автомобиль, который принял почту и, не задерживаясь, повернул обратно. В почтовое отделение автомобиль прибыл на 20 мин раньше, чем обычно. На сколько минут раньше установленного срока приземлился самолёт?

2. Имеется 2013 яблок и весы, с помощью которых возможно узнать суммарный вес любых двух яблок. Можно ли за 1008 взвешиваний узнать общий вес всех яблок?

3. В каждой из 7 кучек различное число камней. Известно, что каждую из кучек можно полностью разложить по остальным так, что число камней во всех них станет равным. Каким может быть минимальное число камней в самой большой кучке?

4. Разрежьте квадрат 1×1 на 7 прямоугольников периметра 2 (приведите хотя бы один пример).

5. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, второй – 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

8 класс

6. В каждой из 8 кучек различное число камней. Известно, что каждую из кучек можно полностью разложить по остальным так, что число камней во всех них станет равным. Каким может быть минимальное число камней в самой большой кучке?

7. На экране компьютера число 123. Компьютер каждую минуту прибавляет к числу на экране 102. Программист Федя может в любой момент изменить число на экране, переставив произвольным образом его цифры. Может ли Федя действовать так, чтобы число на экране оставалось трехзначным?

8. Пусть $ABCD$ четырехугольник такой, что $\angle ADC = 90°$, $\angle BCD = 78°$, $\angle CAB = \angle CBA$, и $AB = 2AD$. Найдите $\angle CAD$.

9. В ряд лежат в некотором порядке семь монет (по одной с весами 1, 2, ... , 7 граммов). Для любой монеты (кроме крайних) известна сумма весов её соседей. У какого наибольшего количества монет можно гарантированно узнать вес?

10. Кубик размером $3 \times 3 \times 3$ составлен из k кирпичей в форме прямоугольных параллелепипедов, длины всех ребер которых равны целым числам. При каком наименьшем k можно наверняка утверждать, что среди этих кирпичей найдутся два одинаковых?

9 КЛАСС

11. В каждой из 9 кучек различное число камней. Известно, что каждую из кучек можно полностью разложить по остальным так, что число камней во всех них станет равным. Каким может быть минимальное число камней в самой большой кучке?

12. Сумма 164 чисел равна 2013. Доказать, что из этих чисел можно выбрать 146 с суммой не меньше 1792. Верно ли то же, если заменить число 1792 на 1793?

13. Простое число $p > 2$ и целые числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{2013}$. Докажите, что $x + y$ делится на p.

14. Угол между продолжениями сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равен $90°$, а длина отрезка PQ, соединяющего середины сторон AD и BC, равна половине разности этих сторон. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

15. Сережа делил натуральное число на 2013 и в каком-то месте после запятой получил четыре девятки подряд. Докажите, что он ошибся.

10 класс

16. В каждой из 10 кучек различное число камней. Известно, что каждую из кучек можно полностью разложить по остальным так, что число камней во всех них станет равным. Каким может быть минимальное число камней в самой большой кучке?

17. Сколько различных корней имеет уравнение?

$$\frac{1}{|x+1|}+\frac{1}{|x-3|}=1.$$

18. Для натуральных чисел x и y нашлись такие различные простые числа p, q, r, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. Докажите, что одно из этих простых чисел равно 2.

19. Точки M и N делят сторону BC треугольника ABC на три равные части (M лежит ближе к B). Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, AM и AN в точках D, E и F соответственно. Докажите, что $EF = 3DE$.

20. Найдите все значения c, при которых для *любых* $a > b > 0$ выполнено неравенство: $a+\sqrt{b+c} > b+\sqrt{a+c}$.

11 класс

21. В каждой из 11 кучек различное число камней. Известно, что каждую из кучек можно полностью разложить по остальным так, что число камней во всех них станет равным. Каким может быть минимальное число камней в самой большой кучке?

22. В парламенте присутствуют депутаты только от партий «Единение» и «Справедливость». При голосовании ровно 55 процентов членов «Единения» и ровно 5 процентов членов «Справедливости» поддержали спикера, в результате он набрал ровно 50 процентов голосов. Какое наименьшее количество депутатов могло входить в парламент?

23. Найдите наибольшее значения выражения

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z.$$

24. В тетраэдре $ABCD$ найдите геометрическое место точек, которые делят отрезок PQ в отношении $1:2$, где P — произвольная точка ребра AB, Q — произвольная точка ребра CD.

25. Для функций f и g, заданных на всей оси, выполнено тождество

$$f(x)\,g(y) = axy + bx + cy + 1$$

(a, b, c = const). Докажите, что $a = bc$.

Оглавление