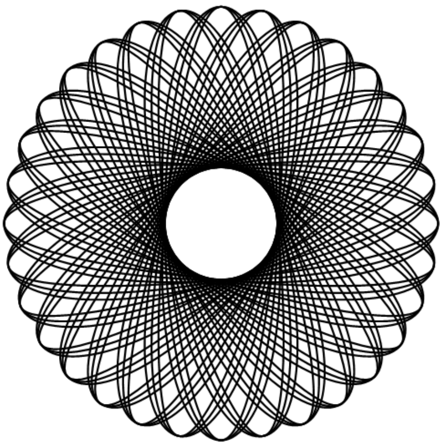
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ (ПОВОЛЖСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ТАТАРСТАНА

2015-2016 учебный год



Казань — 2016

Брошюра предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В ней представлены задачи, предлагавшиеся на муниципальном и региональном этапе математических олимпиад школьников Татарстана в декабре 2015 г. — феврале 2016 г., а также задачи открытой олимпиады имени В. Р. Фридлендера и открытой олимпиады лицея Н. И. Лобачевского. Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

В составлении задач муниципального этапа олимпиады принимали участие преподаватели казанского университета:

И. С. Григорьева, М. И. Киндер,
В. А. Сочнева, М. В. Фалилеева.

В скобках после условия задачи указана фамилия её автора.

Автор-составитель: *М. И. Киндер.*
Компьютерный макет: *М. И. Киндер.*

© М.И.Киндер, 2016.
© Казанский Федеральный Университет, 2016.

Муниципальный этап

8 класс

1. На доске написаны два числа. Одно из них увеличили в 6 раз, а другое уменьшили на 2015, при этом сумма чисел не изменилась. Найдите хотя бы одну пару таких чисел.

2. Известно,что $a^2 + b^2 = 3ab$ и $a \neq b$. Вычислите значение выражения
$$\frac{a+b}{a-b}\,.$$

3. Окружность катится снаружи по квадрату, длина стороны которого равна длине окружности. Сколько полных оборотов сделает эта окружность вокруг своего центра к моменту возвращения в исходное положение?

4. Дано число 2015. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31. Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом? (*М. Киндер*)

5. Из бумаги вырезан правильный шестиугольник, то есть выпуклый шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Можно ли, складывая его по прямым линиям, получить правильный шестиугольник, у которого площадь в три раза меньше площади исходного шестиугольника? (*М. Фалилеева*)

9 класс

6. Найдите наименьшее натуральное число, для которого 20% и 75% от него являются целыми числами.

7. Сумма 65 чисел равна 2015. Когда самое большое из них увеличили в три раза, а другое уменьшили на 62, сумма всех чисел не изменилась. Найдите наименьшее среди этих чисел.

8. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами удовлетворяет неравенству $f(x) \geq 0,2$ при всех x. Докажите, что $f(x) \geq 0,75$ при любом x.

(*По мотивам задачи С. Берлова*)

9. Выпуклый многоугольник, у которого n^2 сторон $(n > 2)$, разрезали на n пятиугольников. Докажите, что $n = 3$.

10. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 его углов пересекают окружность в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что сумма длин биссектрис больше периметра четырёхугольника $ABCD$.

(*С. Утяганов*)

10 класс

11. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

12. Найдите все функции f, удовлетворяющие при всех x уравнению

$$4 \cdot f(x) + f(2015 - x) = x.$$

13. Найдите все действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015} = 2015$ и

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = \ldots = |a_{2015} - a_1|.$$

14. Рассмотрим $2n+1$ действительных чисел в промежутке $(1;\, 2^n)$. Докажите, что из них можно выбрать три числа, которые будут длинами сторон некоторого треугольника.

15. Внутри угла 60° с вершиной A проведён луч AB. В каждый из образовавшихся острых углов вписана окружность, причём обе они касаются луча AB в точке B. Найдите длину отрезка AB, если радиусы окружностей равны 1 и 3.

11 класс

16. Отрезок длины 1 разделили на 2015 отрезков (не обязательно равных). На каждом из них, как на диаметре, построили полуокружность. Эту же операцию повторили, разделив исходный отрезок на 2016 частей. Найдите отношение суммы длин полуокружностей в первом случае к сумме длин полуокружностей во втором.

17. Найдите наименьшее (не обязательно целое) положительное число, для которого 35% и 77% от него являются целыми числами. (*С. Утяганов*)

18. Функция f непрерывна на всей числовой оси. Известно, что уравнение $f(x + f(y + f(z))) = x + y + z$ имеет хотя бы одно решение. Докажите что уравнение $f(x) = x$ также имеет решение. (*М. Киндер*)

19. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq 3(ab + bc + ca).$$

(*М. Киндер*)

20. У выпуклого многоугольника 500 сторон, его периметр равен 700. Докажите, что какие-то три его вершины образуют треугольник, площадь которого меньше 1. (*М. Киндер*)

Олимпиада имени Л. Эйлера

8 класс

21. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записали по кругу в некотором порядке. Назовём записанное число *хорошим*, если оно равно сумме двух чисел, записанных рядом с ним. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел среди записанных? (*Е. Бакаев*)

22. В каждой клетке таблицы 100×100 записано одно из чисел 1 или -1. Могло ли оказаться, что ровно в 99 строках суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 столбцах — положительны? (*Д. Ненашев*)

23. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$. (*Н. Чернега*)

24. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

25. Три спортсмена пробежали дистанцию в 3 километра. Первый километр они бежали с постоянными скоростями v_1, v_2 и v_3 соответственно, такими, что $v_1 > v_2 > v_3$. После отметки в 1 километр каждый из них изменил скорость: первый — с v_1 на v_2, второй — с v_2 на v_3, а третий — с v_3 на v_1. Кто из спортсменов пришел к финишу последним? (*Н. Чернега*)

26. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде $\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}$, где x, y и z — три различных натуральных числа. (*Д. Храмцов*)

27. В ряд выложено 100 монет. Внешне все монеты одинаковы, но где-то среди них лежат подряд 50 фальшивых (а остальные — настоящие). Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые могут весить по-разному, но каждая фальшивая легче настоящей. Можно ли с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы 34 настоящие монеты?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

28. Точки M и N — середины биссектрис AK и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда $\angle MBN = 45°$.

(*А. Кузнецов, методкомиссия*)

Региональный этап

9 класс

29. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

(*Н. Агаханов*)

30. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. В окружности Ω, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC'. Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$. (*Б. Обухов*)

31. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

32. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны $1, 2, \ldots, 11$ кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого? (*И. Богданов, К. Кноп*)

33. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились любые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.) *(И. Богданов)*

34. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел. *(Н. Агаханов)*

35. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными? *(Е. Бакаев)*

36. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90°$. Пусть M — середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$. *(Е. Бакаев)*

10 класс

37. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$? *(Н. Агаханов)*

38. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016? *(О. Дмитриев, Р. Женодаров)*

39. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырехугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

(*Т. Зиманов, П. Кожевников*)

40. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

(*И. Богданов*)

41. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

42. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Окружность, описанная около треугольника BIC, вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω.

(*Б. Обухов*)

43. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

(*Н. Власова*)

44. Найдите все пары различных действительных чисел x и y такие, что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$.

(*И. Богданов*)

11 класс

45. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным? (*Г. Жуков*)

46. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

(*А. Храбров*)

47. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны. (*А. Кузнецов*)

48. Есть клетчатая доска 2015×2015. Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500. Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

49. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a + b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел. (*Н. Агаханов*)

50. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек. (*А. Кузнецов*)

51. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

(*Н. Власова*)

52. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных? (*А. Голованов*)

Олимпиада имени В. Р. Фридлендера

53. Число 2016 делится на 9, 8, 7, 6, 4, 3, 2 и 1 без остатка. Не будет ли случайно следующий год, обладающий точно такими же свойствами, делиться и на 5 тоже?

54. Дима задумал три числа a, b и c и обнаружил, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и k. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трёхчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3k$. Чему может быть равно k?

55. Два путешественника на рассвете вышли навстречу друг другу из пунктов A и B, встретились в полдень и продолжили каждый свой путь (каждый с постоянной скоростью). Первый путешественник пришел в B в 9 часов, а второй в A — в 4 часа вечером того же дня. Во сколько в этот день был рассвет?

56. На плоскости заданы различные точки M_1, M_2, M_3, M_4. Требуется построить окружность так, чтобы её центр совпал с одной из точек, а остальные три точки лежали на окружности. Сколько таких окружностей может быть?

57. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя *а*) ровно в шесть раз; *б*) ровно в пять раз?

58. В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей.

а) Докажите, что $r = r_1 + r_2 + r_3$.

б) Пусть $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 10$. Является ли исходный треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным?

59. Финансист М.А.Вроде основал финансовую пирамиду. Каждый, кто принесёт ему 1000 рублей, через 30 дней вечером в конце дня заберёт 1300 рублей. Считая, что М.А.Вроде держит все деньги в жестяной банке, найдите день, когда денег на выплаты не хватит, в предположении, что ежедневно приходит на M человек больше, чем вчера. (В первый день, 1 января 2016 года, не пришёл никто.)

60. Что больше: $\log_9 10$ или $\log_{10} 11$?

61. Пусть A, B, C и D — четыре (различные) точки в пространстве, для которых $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны.

62. Маша и Даша нашли бусы из 30 бусинок, из них 12 красных и 18 белых. Они хотят разрезать бусы на несколько частей так, чтобы каждой девочке досталось 6 красных и 9 белых бусинок. Какого наименьшего числа разрезов хватит для разрезания произвольных бус?

Олимпиада лицея Н. И. Лобачевского

5 класс

63. Разрежьте таблицу на рисунке 1 по линиям клеток на пять прямоугольников так, чтобы суммы чисел в каждом из них были равны? Укажите все способы и объясните, почему нет других.

2	1	2	1
1	1	3	1
1	1	7	4
1	1	5	3

Рис. 1

64. У Змея Горыныча x голов. Каждым ударом меча Иван-Царевич отрубает одну голову Змею Горынычу. После каждых четырех отрубленных голов у Змея Горыныча появляется одна новая. После 555 ударов змей остался без голов. Найдите x.

65. У Знайки есть 5 внешне одинаковых гирек весом 10 г, 30 г, 50 г, 70 г и 90 г. Он помнит, какая из гирек сколько весит, однако Незнайка ему не верит. Сможет ли Знайка провести одно взвешивание на чашечных весах, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь?

66. Миша и Маша живут в доме с одним подъездом. На каждом этаже дома 9 квартир. Номер этажа Миши равен номеру квартиры Маши, а сумма номеров их квартир равна 444. Каков номер квартиры Миши? Ответ обоснуйте.

67. Букет считается *красивым*, если он состоит из трёх разных цветков. Какое наибольшее количество красивых букетов можно составить, имея 15 гвоздик, 25 ландышей, 35 роз и 45 тюльпанов? Ответ обоснуйте.

6 класс

68. Десятизначное число назовём *интересным*, если каждая из 10 цифр от 0 до 9 входит в него ровно один раз и сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число. Найдите наибольшее интересное число.

69. У Знайки есть 5 внешне одинаковых гирек весом 10 г, 30 г, 50 г, 70 г и 90 г. Он помнит, какая из гирек сколько весит, однако Незнайка ему не верит. Сможет ли Знайка провести одно взвешивание на чашечных весах, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь?

70. У четырёхзначного числа вычеркнули крайнюю справа цифру, при этом полученное число оказалось делителем исходного. Сколько таких четырёхзначных чисел? Ответ обоснуйте.

71. На доске 10×10 расположен корабль в виде трёхклеточного уголка. Какое наименьшее число выстрелов требуется, чтобы наверняка его ранить?

72. Букет считается *красивым*, если он состоит из трёх разных цветков. Какое наибольшее количество красивых букетов можно составить, имея 15 гвоздик, 25 ландышей, 35 роз и 45 тюльпанов? Ответ обоснуйте.

7 класс

73. Девятизначное число назовём *интересным*, если каждая из 9 цифр от 0 до 8 входит в него ровно один раз и сумма любых двух рядом стоящих цифр — простое число. Найдите наименьшее интересное число.

74. В ряд выписали все натуральные числа от 1 до 12 в некотором порядке. Какое наименьшее значение может принимать максимальная сумма двух соседних чисел? Ответ обоснуйте.

75. В футбольном турнире участвовали 12 команд. Соревнования проходили в один круг, то есть каждая команда сыграла с каждой по одному разу, и в каждом туре играли все команды. Могло ли так случиться, что после 6 туров ровно у 6 команд было ровно по 6 побед? Если могло, приведите пример такого турнира.

76. Отрезки AB и CD пересекаются в точке N. Известно, что треугольник AND — равносторонний, а треугольник BCD —

равнобедренный ($BC = BD$). Докажите, что $AB = CN$.

77. У золотой рыбки есть записная книжка, в которой перечислены все её знакомые — караси, окуни, ерши и морские коньки. Оказалось, что половина знакомых — караси, треть — окуни, одна восьмая — ерши, а каждый шестнадцатый в записной книжке — морской конёк. Сколько знакомых у золотой рыбки?

Оглавление